Тридцать первая Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Московская область, 2026 год

Задания и решения

Все классы

Первый тур **2**

Задача *Нейросетевое ценообразование (9-11 класс)* 2

Задача *Баскетбол и стимулы (9-11 класс)* 5

Задача *Парадокс инвестиций в ИИ (9-10 класс)* 8

Задача *Пончики и конкуренция (9 класс)* 14

Задача *Пончики и конкуренция (10-11 классы)* 15

Задача *Такси-монополист-2 (10-11 класс)* 20

Задача *Динамическая ДКП (11 класс)* 22

Второй тур **27**

Задача *Инновации и антимонопольное регулирование (9-11 класс)* 27

Задача *Торговля с ограничениями (9-11 класс)* 30

Задача *Выбираем самое милое животное (9-11 класс)* 34

Задача *Делим неделимое (9 класс)* 38

Задача *Когда брать ипотеку? (9-10 класс)* 41

Задача *Нейросетевое ценообразование (9-11 класс)* *(12 баллов)*

У фирмы-монополиста X есть 299 потенциальных клиентов ($i = 1, 2, \ldots, 299$), каждый из которых нуждается в максимум одной единице товара. Максимальная готовность клиента i платить равна i ден. ед. Фирма знает информацию, приведенную выше, но не может определить номер покупателя по его внешнему виду. Ценовая дискриминация не запрещена. Если цена равна максимальной готовности платить, потребитель покупает товар.

Фирма Y обучила нейросеть, классифицирующую потребителей. Эта нейросеть позволяет по виду клиента (или характеру его действий на сайте) определить, верно ли, что его максимальная готовность платить не ниже некоторого заранее установленного (один раз) порогового значения x. Считайте, что единственные издержки фирмы X — это издержки на подписку на нейросеть.

а) *(4 балла)* Пусть $x = 101$. Какую максимальную сумму фирма X будет готова платить за подписку на эту нейросеть?

б) *(7 баллов)* При каком пороговом значении x готовность фирмы X платить за подписку на нейросеть будет максимальна? (Если таких значений несколько, достаточно привести одно.) Найдите эту максимальную готовность платить.

в) *(1 балл)* Верно ли, что каждый из потребителей не выиграет, если фирма X приобретет подписку на нейросеть при оптимальном x из пункта **б)**? Если потребитель покупает товар, то его полезность равна разнице между его максимальной готовностью платить и ценой. Если не покупает, то полезность равна нулю.

Решение

Сначала найдем прибыль фирмы X без покупки подписки. Спрос задается уравнением $Q = 299 - P + 1 = 300 - P$. Выручка (и прибыль, так как других издержек нет) равна $TR = P(300 - P)$. Максимум достигается при $P = 150$, тогда $Q = 150$, а максимальная выручка $TR_{\max} = 150^2 = 22500$.

а) *(4 балла)* При $x = 101$ нейросеть разделяет клиентов на две группы: первая с готовностью платить $i \in [1; 100]$, вторая — $i \in [101; 299]$. Для первой группы фирма назначит оптимальную цену P_1. Спрос в этой группе: $Q_1 = 100 - P_1 + 1 = 101 - P_1$. Выручка $TR_1 = P_1(101 - P_1)$ максимальна при $P_1 = 50$ или $P_1 = 51$. В обоих случаях $TR_1 = 50 \cdot 51 = 2550$. Для второй группы оптимальная цена без ограничений равна 150. Так как $150 \geqslant 101$, фирма может свободно назначить $P_2 = 150$. Выручка со второй группы составит те же 22500. Общая выручка составит $22500 + 2550 = 25050$. Рост выручки равен 2550 — это и есть максимальная готовность платить за подписку.

б) *(7 баллов)* Поскольку готовности потребителей платить — целые числа, достаточно рассматривать только целые значения x. При произвольном целочисленном пороге x фирма делит потребителей на группу 1 ($i < x$) и группу 2 ($i \geqslant x$). В группе 1 спрос $Q_1 = (x - 1) - P_1 + 1 = x - P_1$. Выручка $TR_1 = P_1(x - P_1)$ достигает максимума при

$$P_1^*(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ четно;} \\ \{(x-1)/2, (x+1)/2\}, & x \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Максимальная выручка составит

$$TR_1(x) = \begin{cases} x^2/4, & x \text{ четно;} \\ (x^2-1)/4, & x \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В группе 2 фирма максимизирует $TR_2 = P_2(300 - P_2)$ при условии $P_2 \geqslant x$. Если $x \leqslant 150$, то ограничение не связывает: $P_2 = 150$, $TR_2 = 22500$. Тогда общая выручка $TR = 22500 + TR_1(x)$. Она монотонно растет по x на этом участке. Если $x > 150$, то ограничение $P_2 \geqslant x$ связывает фирму, и оптимально назначить наименьшую возможную цену, то есть $P_2 = x$. Выручка составит $TR_2 = x(300 - x)$. Общая выручка при $x > 150$:

$$TR(x) = \begin{cases} x^2/4 + x(300-x), & x \text{ четно;} \\ (x^2-1)/4 + x(300-x), & x \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Функции $f_1(x) = x^2/4 + x(300 - x)$ и $f_2(x) = (x^2 - 1)/4 + x(300 - x)$ это параболы с ветвями вниз с одной и той же вершиной $x_v = 200$. Поскольку это число четное, то оно и дает максимум для первого случая, когда x четно. Однако заметим, при любом нечетном x $f_2(x) < f_2(200) = f_1(200) - 1/4 < f_1(200)$. Поэтому оптимальная выручка при нечетных x заведомо ниже, чем при четных. Значит, $x^* = 200$.

Общая выручка составит $TR(200) = 30000$. Прирост выручки, то есть максимальная готовность платить, равен $30000 - 22500 = 7500$.

в) *(1 балл)* Утверждение неверно. При $x = 200$ фирма назначает цены $P_1 = 100$ и $P_2 = 200$. Без нейросети единая цена составляла 150. Потребители с готовностью платить от 101 до 149 ранее не покупали товар (их излишек был равен 0), а теперь купят по цене 100 и получат положительный излишек. Потребители от 150 до 199 ранее покупали по 150, а теперь купят по 100, их излишек вырастет на 50. Следовательно, эти группы потребителей строго выиграют. Достаточно привести один пример потребителя, который выиграет от ценовой дискриминации.

Схема проверки

а) Всего за пункт 4 балла, из них:

K1 Найдена выручка фирмы без дискриминации (22500) → 1 балл

K2 Обосновано, что цена для группы с высокой готовностью платить не изменится → 1 балл

K3 Найдена оптимальная цена/количество (50 или 51, но не 50.5) и выручка для группы с низкой готовностью платить → 1 балл

K4 Сделан верный вывод о готовности платить в размере 2550 → 1 балл

б) Всего за пункт 7 баллов, из них:

K5 Составлена функция выручки для первой группы при произвольном x → 2 балла (если нет выручки для нечётных x → 1 балл из 2)

K6 Верно описана выручка для второй группы в зависимости от того, больше x чем 150 или нет → 2 балла

K7 Найдена точка максимума $x = 200$ → 2 балла

K8 Вычислена максимальная готовность платить (7500) → 1 балл

К9 Для всех пунктов: ошибка на единицу в количестве проданных товаров → -1 балл.

в) Всего за пункт 1 балл:

К10 Проверяется корректность контрпримера (выигрывают потребители с оценками от 100 до 199) и вывод, что утверждение неверно.

Задача *Баскетбол и стимулы (9-11 класс)* *(12 баллов)*

Чемпионат Высшей лиги баскетбола страны Альфа состоит из кругового турнира и стадии плей-офф. В круговом турнире все команды играют друг с другом по нескольку раз. По итогам кругового турнира лучшие команды попадают в плей-офф — стадию игр на выбывание, где разыгрывается чемпионство.

Попадание в плей-офф имеет важные экономические последствия: увеличивает доходы клуба (за счет билетов, рекламы и трансляций), повышает популярность команды, делает ее более привлекательной для звездных игроков и, следовательно, спонсоров. Поэтому каждая команда стремится попасть в плей-офф. Однако не все команды одинаково успешны: часть из них уже по ходу кругового турнира понимает, что не сможет занять место, дающее право на участие в плей-офф.

В Лиге действует так называемая система драфта: каждый год после окончания чемпионата команды получают право выбирать молодых перспективных игроков, которые собираются начать профессиональную карьеру. Первой новичка выбирает команда, которая заняла в круговом турнире самое последнее место. Второй новичка выбирает команда, которая заняла предпоследнее место, и так далее.

а) *(3 балла)* Объясните, почему система драфта нужна Лиге для увеличения своей прибыли.

б) *(3 балла)* Объясните, почему система драфта может влиять на стимулы команды таким образом, что, максимизируя свою собственную выгоду, она будет наносить экономический ущерб Лиге в целом.

в) *(6 баллов)* Руководство Лиги осознало проблему, описанную в пункте **б)**, и решило модифицировать систему драфта. Предложите два различных изменения в правилах Лиги, каждое из которых может изменить стимулы команд для решения этой проблемы. Обоснуйте, почему каждое из предложенных вами изменений правил позволит решить или, по крайней мере, ослабить проблему из пункта **б)**. Приведите также по одному недостатку каждого из предложенных вами изменений правил.

Решение

Историческая справка: Описанная в задаче ситуация не является полностью выдуманной. Именно так изначально работала система драфта в Национальной баскетбольной ассоциации (НБА) в 1940-1960-х годах. Команды действительно прибегали к намеренным проигрышам (в спортивной экономике это называется «танкинг»), чтобы заполучить лучших игроков на драфте. Чтобы побороть эту проблему, в 1985 году НБА ввела драфт-лотерею (где последнее место дает лишь максимальный шанс на первый выбор, но не гарантирует его), а в последние годы ввела турнир плей-ин для расширения зоны борьбы в конце сезона.

а) *(3 балла)* Система драфта помогает усилить самые слабые команды, что способствует выравниванию сил и обострению конкуренции в турнире в следующем сезоне. Более острая конкуренция приводит к тому, что матчи становятся более интересными и непредсказуемыми. Популярность турнира растёт, а вслед за ней увеличиваются и доходы Лиги от продажи билетов, прав на трансляции и рекламных контрактов.

Альтернативным способом увеличения прибыли лиги является создание шоу из самого процесса драфта: за его ходом интересно наблюдать, что аналогичным образом повышает популярность Лиги и её прибыль.

б) *(3 балла)* Если по ходу сезона команда понимает, что в плей-офф ей уже не попасть, у неё появляется стимул занять более низкое место в турнире, чтобы получить лучшего новичка и лучшие спортивные перспективы в следующем сезоне. В результате команда намеренно плохо играет (выпускает резервистов, не прилагает усилий для победы). Это снижает качество и зрелищность матчей, отталкивает зрителей от экранов и трибун, что в итоге наносит экономический ущерб Лиге из-за падения общих доходов.

в) *(6 баллов)* Возможные решения (достаточно привести два):

1. **Введение лотереи при распределении очередности драфта**, когда последнее место в турнире не гарантирует получение первого выбора, а лишь даёт наибольшую вероятность этого события. Это снижает стимулы намеренно проигрывать каждую игру, так как гарантий получения лучшего игрока больше нет.

Недостаток: элемент случайности может привести к тому, что объективно самая слабая команда, реально нуждающаяся в спасении, останется без нужного усиления.

2. **Расширение зоны плей-офф** (или введение стыковых матчей для пограничных мест), чтобы у команд до самого конца сезона было больше шансов пройти в следующую стадию турнира. Данная мера сохраняет спортивный интерес и мотивацию побеждать до самого конца сезона для гораздо большего числа команд.

Недостаток: снижает ценность и эксклюзивность попадания в плей-офф для настоящих лидеров регулярного сезона.

3. **Фиксация рейтинга для драфта в середине сезона**. Как правило, в первой половине кругового турнира у каждой команды ещё есть шансы выйти в плей-офф, поэтому стимул намеренно проигрывать пока не перевешивает стимул бороться за высокие места. Этот механизм позволит устранить намеренные поражения в матчах в конце сезона.

Недостаток: рейтинг в середине сезона больше подвержен случайным факторам, что снижает эффективность балансировки сил команд.

Схема проверки

а) Полный балл за пункт ставился за полное обоснование, как система драфта повышает прибыль Лиги.

Баллы за пункт не ставятся в случае, если приведённый участником механизм повышения прибыли не основан на специфике системы драфта. Например, не оцениваются рассуждения о том, что появление новых игроков необходимо для сохранения интереса к Лиге (приток новых игроков можно обеспечить и без системы драфта).

Баллы за пункт могли быть снижены за неполноту механизма (за каждую неточность снимался 1 балл). Типичные ошибки:

- не обосновано, как повышение зрелищности матчей приводит к повышению прибыли Лиги;
- приведён механизм повышения прибыли одной или нескольких команд, но не указано, как меняется прибыль Лиги;

- не объяснено, почему происходит рост популярности Лиги в целом, а не переток зрителей от одних матчей к другим.

б) Полный балл за пункт ставился за рассуждения о том, что командам, не имеющим шанса на выход в плей-офф, будет выгодно намеренно проигрывать для получения преимущества в драфте.

Баллы за пункт не ставятся за рассуждения, в которых в явном виде не описана ситуация, когда стимул намеренно проиграть превышает стимул бороться за победу. Типичные ошибки:

- не определён или неверно выделен класс команд, которым выгодно проигрывать (например, команды, имеющие несколько поражений подряд);
- не объяснено, зачем командам намеренно проигрывать.

в) По 3 балла ставятся за каждый (не более двух) корректный способ изменения правил Лиги с обоснованием механизма решения проблемы, описанной в пункте **б)**, и примером недостатка.

Баллы за способ изменения правил не ставятся в следующих случаях:

- некорректно определена проблема в пункте **б)**;
- изменение правил «деструктивно» (например, ведёт к отказу команд от участия в Лиге или её исчезновению);
- предложенная мера не изменяет стимулы команд в текущем сезоне, или механизм этого влияния не однозначен (например, запрет команде выбирать первой два года подряд).

Баллы за способ изменения правил могли быть снижены за неполноту рассуждений (за каждую неточность снимался 1 балл). Типичные ошибки:

- не описано, как предложенное изменение решает проблему пункта **б)**;
- пример недостатка не приведён или это пример вида «не полностью решается проблема пункта **б)**».

Задача *Парадокс инвестиций в ИИ (9-10 класс)* *(12 баллов)*

Последнее десятилетие ознаменовалось беспрецедентным бумом инвестиций в инфраструктуру искусственного интеллекта (ИИ). По всему миру возводятся новые дата-центры, а потребление энергоресурсов растет экспоненциально. Однако ряд макроэкономических исследований демонстрируют удивительный диссонанс: вклад этих колоссальных вложений в общую экономическую производительность и рост ВВП пока остается незначительным. Масштаб затрат и экономическая отдача кажутся несопоставимыми.

Однако такой парадокс возникает не впервые. В 1987 году Нобелевский лауреат Роберт Солоу, анализируя экономическую статистику развитых стран, написал: «Компьютерный век можно наблюдать везде, кроме статистики производительности». В 1993 году Эрик Бриньолфссон подтвердил тот же вывод в академическом исследовании: несмотря на технологический прорыв и многократное увеличение вычислительных мощностей, рост производительности во многих развитых странах в тот период замедлился.

а) *(2 балла)* Приведите два различных экономических аргумента, почему существенного эффекта от внедрения новых технологий (на примере ИТ в 1980-х) на производительность может не наблюдаться. Считайте, что данные собраны корректно, и никакие эффекты, связанные с самими данными, методикой их сбора и обработки, не могут служить объяснением парадокса.

б) *(2 балла)* Как правило, подобные парадоксы сглаживаются по мере «взросления» технологии. Приведите два аргумента, объясняющих, за счет чего с течением времени эффект от внедрения ИТ все-таки проявился в росте ВВП.

в) *(4 балла)* Назовите две различные специфичные для современной технологии генеративного ИИ причины, из-за которых эффект на ВВП оказывается слабым. Причины должны отличаться от тех, которые способны объяснить общий парадокс, отмеченный в 1980-х.

г) *(4 балла)* В статье 2024 года Дарон Асемоглу проводит важное различие между способами применения ИИ бизнесом. ИИ можно использовать для автоматизации (замены труда человека), а можно — для расширения возможностей (добавления нового инструмента, создания новых задач для работников). Опишите экономические механизмы: как каждый из этих способов влияет на производительность труда работников и общий выпуск фирмы. При каком из двух способов применения ИИ эффект на долгосрочный экономический рост будет выше и почему? (Приведите одно обоснование.)

Решение

а) Причины отсутствия эффекта от ИТ (любые два аргумента):

- Луддизм. В начале развития новой технологии в обществе и компаниях может быть высокий уровень недоверия к новой технологии, сопровождающийся бойкотированием новой технологии или даже противодействием ей (саботажем). В итоге инвестиции в ИТ есть, но широкого использования среди работников компаний не происходит, в результате чего эффекта от внедрения на производительность может не наблюдаться.

- Инвестиции в бренд и позиционирование, а не улучшение производительности. Инвестиции в ИТ могли делаться с целью повышения имиджа компании как занимающейся передовыми исследованиями, находящейся на технологической границе, что повышает ее стоимость и/или позволяет завоевать большую долю рынка. Однако сам конечный продукт этих инвестиций не так сильно волнует компанию, равно как и применение даже того, что уже было разработано. Поэтому эффекта на производительность может не наблюдаться.
- Адаптация к новой технологии. После внедрения новой технологии работникам необходимо перестроиться под новую технологию, изменить свои привычки ведения рабочего процесса. В результате в краткосрочном периоде положительные эффекты от более эффективной технологии могут компенсироваться падением производительности работника, который только привыкает к нововведению. В итоге общий эффект на производительность может быть около нуля.
- Дублирование технологии. Из-за отсутствия уверенности в новой технологии и ее нестабильности в краткосрочном периоде происходит одновременное использования старой и новой технологии "для перестраховки". Например, параллельное ведение бумажного и электронного финансового отчета компании, пока нет доверия к электронной системе учета. В период такого параллельного использования старой и новой технологии эффективность работника падает, так как он выполняет одну и ту же работу дважды, что снижает производительность.
- Системные ошибки в направлении инвестиций. Стандартный путь многих крупных новых технологии сопровождается бумом инвестиций вокруг этой технологии. Инвестиции происходят по очень многим направлениям, где потенциально технологию можно применить. Однако не все инвестиции являются эффективными: какие-то направления инвестиций оказываются непригодными для новой технологии, а какие-то инвестиции неэффективно расходовались.

б) Причины исчезновения парадокса со временем (любые два аргумента):

В пункте а) обсуждалось, почему краткосрочно от внедрения инновации может быть даже негативный эффект, компенсирующий преимущества более эффективной технологии. В этом пункте обсуждается, почему через какое-то время общий эффект становится положительным.

- Сетевые эффекты. Ценность многих ИТ-решений (электронная почта, интернет, базы данных) растет более чем линейно в зависимости от числа пользователей. На уровне всей экономики общий эффект становится сильно положительным, когда положительный сетевой эффект перевесит негативные эффекты, описанные в пункте а).
- Обучение в производстве (learning-by-doing). После внедрения новой технологии работникам необходимо подстроиться под новую технологию, изменить свои привычки ведения рабочего процесса и довести свое использование технологии до совершенства. Пока работники и фирмы не перестроятся, значимого положительного эффекта на рост ВВП не будет.
- Накопление человеческого капитала. На рынок труда вышло новое поколение

работников, для которых использование компьютеров было естественным. Следовательно, снизились издержки на обучение, а интенсивность использования интерфейсов возросла, увеличивая общефакторную производительность и как следствие ВВП.

- Адаптация под применение (fine tuning).
  По мере взросления технологии в ней корректируются прошлые ошибки, делается более удобный интерфейс на основе собранных отзывов пользователей и тд. Из-за этого технология становится более совершенной, растет общефакторная производительность и как следствие ВВП.
  Еще одной причиной может быть лучшее понимание сфер применимости созданного продукта. Часто случается такое, что самые популярные сегодня ИТ-продукты используются совершенно не так, как их задумывали в момент разработки и внедрения. Но с прошествием времени и проведением исследования поведения пользователей для разработанной технологии находится наилучшее решение с точки зрения сферы применения и направленности продукта. В результате, после доработок эффективность технологии тоже растет, растет общефакторная производительность и растет ВВП. ВВП также будет расти, если будет создан новый сектор экономики.
- Повышение ценности. С течением времени у людей и компаний появляется истинное понимание ценности продукта, а также положительную роль может играть продолжительная маркетинговая кампания. В результате, готовность платить за продукт растет, уже созданный продукт активнее используется компаниями и сотрудниками, общефакторная производительность растет и ВВП растет.

в) Специфичные причины слабого эффекта генеративного ИИ (любые две причины):

- Собственные разработки компании. ИИ обучены на открытых массивах данных, но если в компании есть собственные разработки, например, корпоративный язык программирования, то попытка использовать ИИ для работы с таким языком программирования может не только не ускорить процесс разработки, но и даже замедлить его из-за отсутствия в обучающем датасете большого количества хороших примером использования корпоративного языка программирования. В результате производительность труда может даже упасть и положительный эффект от технологии ИИ на ВВП снизится.
- Правовое регулирование и неопределенность. Именно технология ИИ характеризуется отсутствием конкретного ответственного: не ясно кому принадлежат авторские права и кто несет ответственность в случае нанесением ИИ вреда здоровью человека. Юридические риски и законодательные ограничения заставляют крупные корпорации искусственно тормозят внедрение ИИ в коммерческие продукты и полное раскрытие положительного эффекта на ВВП. из-за страха масштабных судебных исков.
- Процесс дообучения. В отличие от всех предыдущих технологий, ИИ способен улучшаться в процессе дообучения эндогенно без участия человека, тогда как улучшение предыдущих технологий должно было осуществляться человеком.

Это означает, что на начальных этапах работы эффект от ИИ на ВВП может быть слабым, так как преимущества ИИ нивелируются необходимостью начального дообучения, в течение которого принимаемые решение не самые эффективные.

г) Автоматизация vs Расширение возможностей:

- Механизм автоматизации. Капитал (ИИ) замещает труд на уже существующих задачах: вместо человека задачи начинает выполнять ИИ. Происходит снижение средних издержек фирмы, предложение растет из-за чего выпуск может немного вырасти. Допустим, ИИ работает также или даже более эффективно, обеспечивая неснижение объема выпускаемой продукции. Производительность труда оставшихся работников вырастет, так как как минимум при том же или даже более высоком уровне выпуска количество труда сократилось.
- Механизм расширения возможностей. ИИ не заменяет работника, а дополняет его, увеличивая доступный инструментарий. Если с помощью новых инструментов ИИ заменяет рутинные задачи, позволяя работнику заняться задачами более содержательными, то большее внимание, уделенное на творческие задачи (например, глубокая персонализация), может сильно повысить количество выпускаемой продукции и/или её качество, что означает более высокую предельную производительность труда.
- Где эффект на рост выше и почему. Эффект на долгосрочный экономический рост выше при расширении возможностей (комплементарном использовании). Обоснование: сильный технологический сдвиг в виде замены труда искусственным интеллектом может повысить естественный уровень безработицы в экономике (в основном за счет структурной безработицы). Это означает, что из производственной функции ВВП исключается дополнительный труд и человеческий капитал. А человеческий капитал (образование, навыки) является основным источником роста в современной теории роста. Более высокий уровень естественной безработицы приводит к тому, что меньше людей задействовано в производстве, а значит меньшими темпами накапливается человеческий капитал, трудовые навыки (меньшее количество человек, например, может сгенерировать меньше хороших идей по оптимизации бизнес-процессов). Значит, что вслед за ростом естественной безработицы темпы роста человеческого капитала будут падать, а значит и падать темп роста ВВП в долгосрочном периоде.

Схема проверки

а) 2 балла, из них:

+1 балл за каждый корректный и обоснованный аргумент (максимум 2 аргумента). Если написано больше двух аргументов, то оцениваются только первые два. Без объяснения экономического механизма (почему именно это мешало росту производительности) ставится 0 баллов за аргумент.

Если аргумент не про эффект на производительность, то он не засчитывается.

Аргумент про слишком высокий финансовый барьер входа (новая технология слишком дорогая), поэтому внедряют ее не все и эффект на общую производительность низкий - не засчитывается. В условии просят эффект от уже внедренной технологии, поэтому отсутствие эффекта надо объяснить какими-то отрицательными эффектами, которые не позволяют общему эффекту на производительность стать значимо положительным.

Аргумент про то, что инвестиции в ИТ отвлекают средства от альтернативных способов повысить производительность труда не засчитываются. В задании спрашивается не про упущенный прирост производительности, а про то, почему уже сделанные инвестиции в ИТ не оказывают в течение некоторого времени положительного эффекта на производительность.

б) 2 балла, из них:

+1 балл за каждый корректный и обоснованный аргумент (максимум 2 аргумента).

Если написано больше двух аргументов, то оцениваются только первые два. Балл не ставится, если нет итогового вывода про ВВП.

Если аргумент не про эффект на ВВП, то он не засчитывается.

Аргумент про то, что ИТ создает новые отрасли в экономике и повышает тем самым ВВП не засчитывается, если не пояснено почему изначально эти новые отрасли не создавались, а стали появляться только по прошествии какого-то времени.

Аргумент про то, что со временем продукт начинают внедрять больше (например, из-за того что он стал дешевле) и только из-за этого есть положительный эффект на ВВП, не засчитывается.

в) 4 балла, из них:

+2 балла каждую корректно названную и объясненную причину, специфичную именно для ИИ (максимум 2 причины). Если приведена причина, которая подходит и для других технологических нововведений, то за причину ставится 0 баллов. Если написано больше двух , то оцениваются только первые два.

Аргумент про каннибализацию (новая технология вытесняет старые профессии) не засчитывался, так как многие новые технологии вытесняли с рынка какие-то профессии.

Аргумент про недоверие к новой технологии не является специфичным для ИИ: недоверие и даже протесты были и против компьютером, и против интернета и даже против калькуляторов.

Аргумент про то, что люди недооценивают реальный эффект от ИИ тоже не является специфичным, так как эффект от многих новых технологий тяжело оценить в самом начале ее развития.

Аргумент про то, что ИИ нужно перепроверять, на что тратится время, не является специфичным: многие технологии, в том числе и станки массового производства, тоже требует проверки качества от человека.

г) 4 балла, из них:

+1 балл за верное описание макроэкономических/микроэкономических механизмов влияния ИИ (замена труда человека) на выпуск и производительность. Без обоснования или при неверном обосновании баллы не ставятся. Если одно из суждений про эффект на выпуск или производительность ошибочное, а также если одно из суждений отсутствует, то балл не ставится. Верно должны быть описаны оба эффекта: на выпуск и производительность.

+1 балл за верное описание макроэкономических/микроэкономических механизмов влияния ИИ (расширение возможностей) на выпуск и производительность. Без обоснования или при неверном обосновании баллы не ставятся. Если одно из суждений про эффект на выпуск или производительность ошибочное, а также если одно из суждений отсутствует, то балл не ставится. Верно должны быть описаны оба эффекта: на выпуск и производительность.

Отличные от авторского решения аргументы могут быть засчитаны, при наличии корректного и согласующего с экономической теорией обоснования.

Если написано больше двух аргументов, то оцениваются только первые два.

+2 балла за верное сравнение, 0 иначе. Если хотя бы один описанных механизмов, который используется в аргументе, неверный, то ставится 0 баллов. Оценка за данный вопрос только либо 0, либо 2.

При корректной, согласующейся с экономической теорией аргументацией, засчитывался и вариант ответа в пользу более высокого эффекта на экономический рост от использования ИИ в качестве замены труда.

Аргумент про то, что при замене труда производительность труда не изменится без конкретного обоснования не засчитывается, так как наиболее вероятно, что она вырастет. Даже при том же объеме выпуска труда используется меньше и тогда производительность труда должна вырасти.

Общий аргумент, что при использовании ИИ для расширения возможностей растет эффективность труда и производительность без конкретного обоснования не засчитывается.

Задача *Пончики и конкуренция (9 класс)* *(12 баллов)*

Лицеисты города Водопрудного очень любят есть пончики. Суточный спрос на них задан функцией $q = 1200 - 20p$. Местная пекарня-монополист печет их со средними издержками, которые не зависят от объема продаж и составляют 10 руб. за штуку.

а) *(3 балла)* По какой цене нужно продавать пончики, чтобы максимизировать прибыль? Сколько пончиков будет продаваться? Какова будет ежедневная прибыль пекарни?

б) *(3 балла)* Видя высокий спрос, на рынок хочет войти конкурент с более высокими средними издержками, равными 16 руб. за штуку. Если монополист продает пончики не дороже 16 руб. за штуку, то конкурент на рынок не войдет. Чему станет равна максимальная прибыль пекарни, если она так и сделает?

в) *(6 баллов)* Альтернативной стратегией является допуск новичка на рынок и взаимодействие с ним следующим образом: каждая из фирм поставляет на рынок некоторое количество пончиков. В зависимости от их суммарных поставок на основе функции спроса на рынке устанавливается цена. Новичок видит поставки местной пекарни и выбирает оптимальный выпуск, максимизирующий его прибыль. Более дальновидная местная пекарня понимает стратегию новичка и заранее выбирает свой выпуск так, чтобы обеспечить себе максимальную прибыль с учетом будущей реакции конкурента. Какую прибыль получит пекарня в этих условиях? Какая из двух стратегий (не пускать конкурента или стать лидером) оказывается выгоднее?

Решение

а) *(3 балла)* Если продавать пончики по цене p, функция прибыли местной пекарни примет вид $\pi = p \cdot q - 10q = p(1200 - 20p) - 10(1200 - 20p) = 1400p - 20p^2 - 12000 \to \max$.

Данная функция представляет собой параболу ветвями вниз. Максимум достигается в вершине: $p^* = \frac{1400}{2 \cdot 20} = 35$ руб.

Оптимальный объем продаж составит: $q = 1200 - 20 \cdot 35 = 500$ пончиков. Максимальная суточная прибыль равна: $\pi = (35 - 10) \cdot 500 = 12500$ руб.

б) *(3 балла)* Функция прибыли местной пекарни $\pi(p) = 1400p - 20p^2 - 12000$ монотонно возрастает в диапазоне $0 < p < 35$, поэтому пекарне хочется установить максимально высокую цену, при которой конкурент не войдет на рынок, то есть цену на уровне его издержек $p = 16$ руб. (при такой цене конкурент не сможет получать положительную прибыль и откажется от входа).

Объем продаж при данной цене: $q = 1200 - 20 \cdot 16 = 880$ пончиков. Соответствующее значение прибыли: $\pi = (16 - 10) \cdot 880 = 5280$ руб.

в) *(6 баллов)* В качестве альтернативы пекарня пускает на рынок конкурента. Цена определяется суммарными поставками $q = q_1 + q_2$, где q_1 — выпуск местной пекарни, а q_2 — выпуск новичка. Найдем ее из функции спроса: $p = 60 - 0{,}05q = 60 - 0{,}05q_1 - 0{,}05q_2$.

Запишем прибыль новичка и максимизируем ее (он воспринимает q_1 как заданную величину): $\pi_2 = p \cdot q_2 - 16q_2 = (60 - 0{,}05q_1 - 0{,}05q_2)q_2 - 16q_2 = 44q_2 - 0{,}05q_2^2 - 0{,}05q_1q_2 \to \max$.

Это парабола ветвями вниз относительно q_2. Точка максимума достигается в вершине: $q_2 = \frac{44-0{,}05q_1}{2\cdot 0{,}05} = 440 - 0{,}5q_1$. Таким образом, мы получили кривую реакции новичка.

Подставим данную кривую реакции в функцию прибыли дальновидной местной пекарни: $\pi_1 = p \cdot q_1 - 10q_1 = (60 - 0{,}05q_1 - 0{,}05q_2)q_1 - 10q_1 = (50 - 0{,}05q_1 - 0{,}05(440 - 0{,}5q_1))q_1 \to \max$.

Упростим выражение в скобках: $\pi_1 = (50 - 0{,}05q_1 - 22 + 0{,}025q_1)q_1 = (28 - 0{,}025q_1)q_1 = 28q_1 - 0{,}025q_1^2 \to \max$.

Это снова парабола ветвями вниз. Найдем оптимальный выпуск местной пекарни: $q_1 = \frac{28}{2\cdot 0{,}025} = 560$ пончиков.

Выпуск новичка: $q_2 = 440 - 0{,}5 \cdot 560 = 160$ пончиков. Суммарный объем поставок: $q = q_1 + q_2 = 560 + 160 = 720$. Цена на рынке: $p = 60 - 0{,}05 \cdot 720 = 24$ руб.

Прибыль пекарни составит: $\pi_1 = (24 - 10) \cdot 560 = 7840$ руб. Сравним две стратегии: $7840 > 5280$. Выгоднее пустить конкурента на рынок и сыграть роль лидера, чем ставить барьеры входа, искусственно занижая цену.

Схема проверки

а) Всего за пункт (а) 3 балла, из них:

K1 Найдена оптимальная цена (35 руб.) → 1 балл

K2 Найден оптимальный объем продаж (500) → 1 балл

K3 Найдена максимальная прибыль (12500 руб.) → 1 балл

Прим. Если итоговые значения не найдены, но корректно выписана функция прибыли от одной переменной (цены или объема), дается 1 балл.

б) Всего за пункт (б) 3 балла, из них:

K4 Найдена и обоснована цена предотвращения входа (16 руб.) → 1 балл

K5 Найден соответствующий объем продаж (880) → 1 балл

K6 Найдена прибыль пекарни (5280 руб.) → 1 балл

в) Всего за пункт (в) 6 баллов, из них:

K7 Выполнен переход к обратной функции спроса, зависящей от q_1 и q_2 → 1 балл

K8 Решена задача новичка, получена его кривая реакции → 1 балл

K9 Выписана задача местной пекарни (лидера) от одной переменной q_1 → 1 балл

K10 Найдены объемы выпуска в равновесии ($q_1 = 560$, $q_2 = 160$) → 1 балл

K11 Рассчитана прибыль пекарни в равновесии (7840 руб.) → 1 балл

K12 Сделан верный вывод о том, какая стратегия выгоднее → 1 балл

Задача *Пончики и конкуренция (10-11 классы)* *(12 баллов)*

Лицеисты города Водопрудного очень любят есть пончики. Суточный спрос на них задан функцией $q = 1200 - 20p$. Местная пекарня-монополист печет их со средними издержками, которые не зависят от объема продаж и составляют 10 руб. за штуку.

а) *(2 балла)* По какой цене нужно продавать пончики, чтобы максимизировать прибыль? Сколько пончиков будет продаваться? Какова будет ежедневная прибыль пекарни?

б) *(2 балла)* Видя высокий спрос, на рынок хочет войти конкурент с более высокими средними издержками, равными 16 руб. за штуку. Если монополист продает пончики не дороже 16 руб. за штуку, то конкурент на рынок не войдет. Чему станет равна максимальная прибыль пекарни, если она так и сделает?

в) *(4 балла)* Альтернативной стратегией является допуск новичка на рынок и взаимодействие с ним следующим образом: каждая из фирм поставляет на рынок некоторое количество пончиков. В зависимости от их суммарных поставок на основе функции спроса на рынке устанавливается цена. Новичок видит поставки местной пекарни и выбирает оптимальный выпуск, максимизирующий его прибыль. Более дальновидная местная пекарня понимает стратегию новичка и заранее выбирает свой выпуск так, чтобы обеспечить себе максимальную прибыль с учетом будущей реакции конкурента. Какую прибыль получит пекарня в этих условиях? Какая из двух стратегий (не пускать конкурента или стать лидером) оказывается выгоднее?

г) *(4 балла)* Предложите пример некоторой убывающей линейной функции спроса и средних издержек местной пекарни и новичка-конкурента, при которых более выгодной для пекарни (по сравнению с выбранной в предыдущем пункте) станет другая стратегия, или докажите, что это невозможно.

Решение

а) *(2 балла)* Если продавать пончики по цене p, функция прибыли местной пекарни примет вид $\pi = p{\cdot}q - 10q = p(1200-20p) - 10(1200-20p) = 1400p - 20p^2 - 12000 \to \max$.

Данная функция представляет собой параболу ветвями вниз. Максимум достигается в вершине: $p^* = \frac{1400}{2\cdot 20} = 35$ руб.

Оптимальный объем продаж составит: $q = 1200 - 20 \cdot 35 = 500$ пончиков. Максимальная суточная прибыль равна: $\pi = (35 - 10) \cdot 500 = 12500$ руб.

б) *(2 балла)* Функция прибыли местной пекарни $\pi(p) = 1400p - 20p^2 - 12000$ монотонно возрастает в диапазоне $0 < p < 35$, поэтому пекарне хочется установить максимально высокую цену, при которой конкурент не войдет на рынок, то есть цену на уровне его издержек $p = 16$ руб. (при такой цене конкурент не сможет получать положительную прибыль и откажется от входа).

Объем продаж при данной цене: $q = 1200 - 20{\cdot}16 = 880$ пончиков. Соответствующее значение прибыли: $\pi = (16 - 10) \cdot 880 = 5280$ руб.

в) *(4 балла)* В качестве альтернативы пекарня пускает на рынок конкурента. Цена определяется суммарными поставками $q = q_1 + q_2$, где q_1 — выпуск местной пекарни, а q_2 — выпуск новичка. Найдем ее из функции спроса: $p = 60 - 0{,}05q = 60 - 0{,}05q_1 - 0{,}05q_2$.

Запишем прибыль новичка и максимизируем ее (он воспринимает q_1 как заданную величину): $\pi_2 = p{\cdot}q_2 - 16q_2 = (60 - 0{,}05q_1 - 0{,}05q_2)q_2 - 16q_2 = 44q_2 - 0{,}05q_2^2 - 0{,}05q_1q_2 \to \max$.

Это парабола ветвями вниз относительно q_2. Точка максимума достигается в вершине: $q_2 = \frac{44 - 0{,}05q_1}{2\cdot 0{,}05} = 440 - 0{,}5q_1$. Таким образом, мы получили кривую реакции новичка.

Подставим данную кривую реакции в функцию прибыли дальновидной местной пекарни: $\pi_1 = p \cdot q_1 - 10q_1 = (60 - 0{,}05q_1 - 0{,}05q_2)q_1 - 10q_1 = (50 - 0{,}05q_1 - 0{,}05(440 - 0{,}5q_1))q_1 \to \max$.

Упростим выражение в скобках: $\pi_1 = (50 - 0{,}05q_1 - 22 + 0{,}025q_1)q_1 = (28 - 0{,}025q_1)q_1 =$

$28q_1 - 0{,}025q_1^2 \to \max$.

Это снова парабола ветвями вниз. Найдем оптимальный выпуск местной пекарни: $q_1 = \frac{28}{2\cdot 0{,}025} = 560$ пончиков.

Выпуск новичка: $q_2 = 440 - 0{,}5 \cdot 560 = 160$ пончиков. Суммарный объем поставок: $q = q_1 + q_2 = 560 + 160 = 720$. Цена на рынке: $p = 60 - 0{,}05 \cdot 720 = 24$ руб.

Прибыль пекарни составит: $\pi_1 = (24 - 10) \cdot 560 = 7840$ руб. Сравним две стратегии: $7840 > 5280$. Выгоднее пустить конкурента на рынок и сыграть роль лидера, чем ставить барьеры входа, искусственно занижая цену.

г) *(4 балла)* Противоположный вывод невозможен. Докажем это. Пусть обратная функция спроса на пончики имеет вид $p = a - bq = a - b(q_1 + q_2)$, а средние издержки производства не зависят от выпуска и составляют соответственно c_1 и c_2 для пекарни и новичка-конкурента (причем логично предположить, что $c_1 < c_2$).

В рамках первой стратегии (барьеры входа) пекарня устанавливает цену $p_1 = c_2$, продавая при этом продукцию в количестве $q_1 = \frac{a-c_2}{b}$. Прибыль пекарни примет вид:

$$\pi_1^{limit} = (p_1 - c_1)q_1 = \frac{(c_2 - c_1)(a - c_2)}{b}.$$

В рамках второй стратегии (которая представляет собой стратегию лидера по Штакельбергу) дальновидная пекарня учитывает при принятии решения о выпуске оптимальные действия новичка, максимизирующего свою прибыль: $\pi_2 = (a - b(q_1 + q_2))q_2 - c_2q_2 \to \max$. Отсюда можно найти кривую реакции новичка: $q_2 = \frac{a-c_2}{2b} - 0{,}5q_1$. Подставим полученную зависимость в функцию прибыли пекарни: $\pi_1^{stackelberg} = \left(a - b\left(q_1 + \frac{a-c_2}{2b} - 0{,}5q_1\right)\right)q_1 - c_1q_1 = \left(\frac{a+c_2-2c_1}{2} - 0{,}5bq_1\right)q_1 \to \max$.

Максимизация данной квадратичной функции дает решение: $q_1^* = \frac{a+c_2-2c_1}{2b}$. Прибыль пекарни при этом будет равна:

$$\pi_1^{stackelberg} = 0{,}5b(q_1^*)^2 = \frac{(a + c_2 - 2c_1)^2}{8b}.$$

Сравним прибыли пекарни при двух описанных стратегиях поведения, вычтя из второй прибыли первую. Для удобства обозначим $x = a - c_2$ и $y = c_2 - c_1$. Тогда числитель можно выразить через эти переменные: $a + c_2 - 2c_1 = x + 2y$. Разность прибылей примет вид:

$$\Delta\pi = \pi_1^{stackelberg} - \pi_1^{limit} = \frac{(x + 2y)^2}{8b} - \frac{xy}{b} = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{8b} = \frac{(x - 2y)^2}{8b} \geqslant 0.$$

Таким образом, доказано, что прибыль от стратегии «пустить конкурента на рынок» в условиях задачи всегда не ниже (в большинстве случаев строго выше), чем от стратегии «создавать ценовые барьеры входа».

Представленное выше аналитическое доказательство справедливо при $c_2 < \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c_1$.

При $c_2 > \frac{a+c_1}{2}$ пекарня ведет себя как монополист, новичок не входит на рынок, но это не является сменой стратегии. Баллы в этом случае не ставятся.

При $c_2 \in [\frac{1}{3} + \frac{2}{3}c_1; \frac{a+c1}{2}]$ пекарня, максимизирующая прибыль, выберет выпуск $q_1 = 1200{-}20c_2$, новичок на рынок не войдет. Обе стратегии приведут к одинаковым результатам, но строго лучшего результата не достигается. За такое решение ставится 2 балла.

Если в этом же диапазоне значений c_2 для пекарни использовалась прежняя стратегия $q_1 = \frac{a+c_2-2c_1}{2b}$ и прибыль $\pi_1^{stackelberg} = \frac{(a+c_2-2c_1)^2}{8b}$, это не является оптимальной стратегией, поэтому строго лучшего результата не достигается. С учетом ошибки за такое решение ставится 2 балла.

Если доказательство невозможности корректно проведено для конкретных (например, заданных в пунктах а-в) издержек или конкретной функции спроса, за это ставится 2 балла.

Если частный пример с ошибкой, не приводящей к эквивалентности стратегий, выдавался за контрпример, за него баллы не ставятся.

Можно рассмотреть более общую задачу сравнения тех же двух стратегий пекарни для функций спроса и издержек произвольного вида. Вывод о том, что стратегия ценового вытеснения новичка не может быть строго выгоднее стратегии лидера по Штакельбергу, сохраняется.

Пусть для некоторой убывающей функции спроса $q_D(p)$ и неубывающих суммарных издержек $TC_1(q_1)$ и $TC_2(q_2)$ оптимальной стратегией пекарни оказывается вытеснение конкурента через установление цены p^*. Это означает, что $q_2 = 0$, $q_1 = q_D(^*)$.

Пусть лидер по Штакельбергу выйдет на рынок с объемом $q_1 = q_D(p^*)$. С учетом неотрицательной добавки конкурента и убывания спроса цена при этом окажется не выше p^*, что тем более приведет к $q_2 = 0$. Из этого следует, что, как минимум, результат, эквивалентный стратегии вытеснения, для лидера по Штакельбергу достижим.

За подобное доказательство ставится полный балл за пункт г), то есть 4 балла.

Схема проверки

а) Всего за пункт (а) 2 балла, из них:

К1 За верное нахождение цены или объема, либо корректное выписывание функции прибыли от одной переменной → 1 балл

К2 За полное решение задачи монополиста (цена, объем, прибыль) → 1 балл

б) Всего за пункт (б) 2 балла, из них:

К3 За верное нахождение цены и объема → 1 балл

К4 За нахождение прибыли → 1 балл

в) Всего за пункт (в) 4 балла, из них:

К5 Решение задачи новичка, получение его кривой реакции → 1 балл

К6 Выписывание задачи пекарни от одной переменной q_1 → 1 балл

К7 Полное решение задачи пекарни в равновесии → 1 балл

К8 Вывод о том, какая стратегия выгоднее → 1 балл

г) Всего за пункт (г) 4 балла, из них:

К9 Полное решение задачи пекарни в случае создания ценовых барьеров входа → 1 балл

К10 Выписывание задачи пекарни от одной переменной q_1 → 1 балл

K11 Полное решение задачи пекарни в случае допуска новичка на рынок → 1 балл

K12 Корректное доказательство, что прибыль от второй стратегии всегда выше, чем прибыль от первой → 1 балл

Задача *Такси-монополист-2 (10-11 класс)* *(12 баллов)*

Продолжим тему регулирования агрегаторов такси, поднятую нами в региональном этапе олимпиады. Снова рассмотрим город, в котором работает единственный сервис такси (платформа-монополист), соединяющий пассажиров и водителей. В дневное время спрос на услуги такси описывается уравнением $Q_D = 400 - P_D$, а предложение — уравнением $Q_S = P_S - 100$. Платформа устанавливает P_D и P_S, разницу забирая себе. Напомним, что в отсутствие вмешательства государства оптимальный для платформы объем поездок равен 75.

Добавим новое условие: платформа-монополист несет на свое функционирование постоянные издержки, равные $FC = 10\,000$ (других издержек, помимо выплат водителям, нет). Решение о том, работать ли ей (и понести FC) или не открываться (и не понести FC), платформа принимает после того, как узнает о том, какова политика государства. При безразличии платформа выбирает работать. Если платформа функционирует, то все поездки совершаются через нее. При подсчете общественного благосостояния в присутствии платформы учитывайте ее *прибыль*.

а) *(1 балл)* В отсутствие платформы водителям и пассажирам было бы гораздо сложнее находить друг друга, и поэтому в этом случае реализовался бы только объем поездок $Q_0 = 20$. Чему было бы равно общественное благосостояние в отсутствие платформы *в лучшем случае*, то есть если объем Q_0 поездок совершался бы водителями с наиболее низкими издержками, которые перевозили бы пассажиров с наибольшей готовностью платить? В дальнейшем считайте, что в отсутствие платформы реализуется именно этот уровень благосостояния.

б) *(1 балл)* Приводит ли существование платформы к повышению общественного благосостояния? Если да, то на сколько ден. ед.?

в) *(4 балла)* Допустим, государство может назначать пол и/или потолок количества поездок на платформе. Найдите максимально возможный уровень общественного благосостояния, достижимый с помощью этих инструментов.

г) *(6 баллов)* Теперь допустим, что государство не может вводить пол и потолок количества поездок, но может ввести для платформы субсидию по произвольной схеме $S = f(Q)$, где S — общая сумма выплаченной субсидии (возможно, отрицательная), Q — объем поездок на платформе. Если платформа безразлична между несколькими объемами, она выбирает наибольший. При какой схеме $f(Q)$ выполнены следующие два условия: (1) общественное благосостояние максимально и (2) расходы на субсидию минимальны среди всех схем, удовлетворяющих условию (1)? Достаточно привести пример одной такой схемы $f(Q)$ с обоснованием. Найдите максимально возможный уровень благосостояния, достижимый с помощью такого инструмента, и минимально возможные расходы на субсидию.

Решение

Обратные функции спроса и предложения имеют вид $P_D = 400 - Q$ и $P_S = 100 + Q$. Общественное благосостояние (W) — это суммарная выгода всех участников рынка. До вычета постоянных издержек FC оно представляет собой площадь фигуры между кривыми спроса и предложения на участке от 0 до Q. Эта фигура является трапецией. Ее первое основание (разница цен при $Q = 0$): $400 - 100 = 300$. Второе основание (разница цен при заданном объеме Q): $(400 - Q) - (100 + Q) = 300 - 2Q$. Высота трапеции: Q. Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту: $S = \frac{300+(300-2Q)}{2} \cdot Q = \frac{600-2Q}{2} \cdot Q = 300Q - Q^2$. Формула общественного благосостояния при функционирующей платформе (с учетом постоянных издержек): $W(Q) = 300Q - Q^2 - 10000$.

а) *(1 балл)* В отсутствие платформы FC нет. Благосостояние равно площади трапеции при $Q = 20$: $W_0 = 300 \cdot 20 - 20^2 = 6000 - 400 = 5600$.

б) *(1 балл)* Платформа без регулирования выберет $Q_M = 75$. Благосостояние составит: $W_M = 300 \cdot 75 - 75^2 - 10000 = 22500 - 5625 - 10000 = 6875$. Разница: $\Delta W = 6875 - 5600 = 1275$. Да, платформа приводит к повышению благосостояния на 1275 ден. ед.

Примечание: вывод о том, что благосостояние растет, не очевиден из-за наличия FC. Например, при тех же FC и $Q_0 = 30$ платформа вошла бы на рынок, но этим своим шагом уменьшила бы благосостояние!

в) *(4 балла)* Общественное благосостояние равно $W(Q) = 300Q - Q^2 - 10000$, если платформа работает, и 5600, если нет. Платформа работает, если $\pi(Q) \geqslant 0$, то есть $300Q - 2Q^2 - 10000 \geqslant 0$. Таким образом, если государство директивно назначит количество поездок на платформе (например, комбинацией пола и потолка), то благосостояние составит

$$\begin{cases} 300Q - Q^2 - 10000, & 300Q - 2Q^2 - 10000 \geqslant 0; \\ 5600, & 300Q - 2Q^2 - 10000 < 0. \end{cases}$$

Неравенство $300Q - 2Q^2 - 10000 \geqslant 0$ эквивалентно $Q \in [50; 100]$, так что благосостояние равно

$$\begin{cases} 300Q - Q^2 - 10000, & 50 \leqslant Q \leqslant 100; \\ 5600, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку вершина параболы $300Q - Q^2 - 10000$ находится в точке $Q = 150 > 100$, функция $300Q - Q^2 - 10000$ возрастает на этом участке, а значит, оптимальным Q на нем является $Q = 100$. Благосостояние при $Q = 100$ равно 10000 > 5600, и поэтому объем $Q = 100$ оптимален. Государству достаточно установить пол (минимальный объем) $Q = 100$, так как прибыль фирмы убывает при $Q \geqslant 100$. (Здесь неравенство 10000 > 5600 можно и не проверять, так как из ответа на пункт б) следует, что даже при выпуске $Q = 75$ благосостояние в присутствии платформы выше, чем без нее, значит, при $Q = 100$ это тем более так, ведь благосостояние возрастает на этом участке.)

г) *(6 баллов)* Глобальный максимум функции $W(Q)$ достигается в вершине параболы $Q^* = 150$. Максимально возможное благосостояние: $W_{max} = 300 \cdot 150 - 150^2 - 10000 = 12500$. Прибыль платформы при $Q = 150$ без субсидии составит: $\pi(150) = 300 \cdot 150 - 2 \cdot 150^2 - 10000 = 45000 - 45000 - 10000 = -10000$. Чтобы платформа согласилась работать, ее итоговая прибыль должна быть неотрицательной: $\pi(150) + S(150) \geqslant 0 \implies S(150) \geqslant 10000$. Значит, минимальные расходы на субсидию равны $S_{min} = 10000$. Для того чтобы платформа добровольно выбрала $Q = 150$, эта точка должна приносить ей максимальную прибыль с учетом субсидии. Максимальная прибыль платформы без субсидии достигается в вершине параболы прибыли $Q = 75$ и равна 1250. Подходящим примером функции $f(Q)$ будет такая схема, которая компенсирует издержки при $Q = 150$ и делает все остальные варианты менее привлекательными или приносящими такую же прибыль (такую же может только при $Q \leq 150$, иначе платформа выберет больший объем):

$$f(Q) = \begin{cases} 10000, & Q = 150 \\ -1250 - 1, & Q \neq 150 \end{cases}$$

При такой схеме прибыль платформы при $Q = 150$ равна 0. Поскольку штраф при низких Q больше чем максимальная прибыль без вмешательства, выпуск $Q = 150$ является единственным оптимальным, платформа выберет его.

Схема проверки

а) Всего за пункт 1 балл, из них:

K1 Корректно рассчитано значение $W_0 = 5600 \to 1$ балл

б) Всего за пункт 1 балл, из них:

K2 Корректно рассчитано значение $W_M = 6875 \to 1$ балл

в) Всего за пункт 4 балла, из них:

K3 Составлено ограничение на участие платформы ($\pi(Q) \geqslant 0) \to 1$ балл

K4 Найден допустимый диапазон объемов ($Q \in [50; 100]$) или его верхняя граница $\to 1$ балл

K5 Указано, что на допустимом множестве $W(Q)$ возрастает и максимум достигается при $Q = 100 \to 1$ балл

K6 Верно найдено максимальное благосостояние $W = 10000 \to 1$ балл

г) Всего за пункт 6 баллов, из них:

K7 Найден глобальный общественный оптимум $Q = 150 \to 1$ балл

K8 Верно найдено максимально возможное благосостояние $W = 12500 \to 1$ балл

K9 Рассчитана прибыль монополиста в точке общественного оптимума $(-10000) \to$ 1 балл

K10 Обосновано и найдено минимальное значение расходов на субсидию $S = 10000$, необходимое для достижения $Q = 150 \to 1$ балл

K11 Приведена корректная функция (схема) субсидирования, то есть функция субсидии $f(Q)$, удовлетворяющая следующим ограничениям:

$$\begin{cases} f(Q) \leq -\pi(Q), & Q < 150; \\ f(Q) = -\pi(Q), & Q = 150; \\ f(Q) < -\pi(Q), & Q > 150, \end{cases}$$

где $\pi(Q) = 300Q - 2Q^2 - 10000 \to 1$ балл.

K12 Дано обоснование, почему платформа выберет именно $Q = 150$ при предложенной схеме $\to 1$ балл

Задача *Динамическая ДКП (11 класс)* *(12 баллов)*

Рассмотрим закрытую экономику, в которой изменение во времени двух макропеременных — разрыва выпуска x_t и инфляции π_t — задано двумя функциями:

$$x_t = x_{t-1} - 0{,}5(i_t - \pi_t^e - 4) \tag{7.1}$$

$$\pi_t = x_t + \pi_t^e \tag{7.2}$$

Уравнение (3.1) обычно называют «кривая IS», а уравнение (3.2) — форма записи кривой Филлипса. Здесь $i_t \geqslant 0$ — номинальная ставка, которую устанавливает центральный банк, π_t^e — ожидаемая инфляция. Значения всех переменных измеряются в процентах. Начальные условия в период $t = 0$: $x_0 = 2$, $\pi_0 = 8$.

Задача Центрального банка — поддерживать инфляцию на целевом уровне $\pi^\star = 4$, при этом он стремится предотвращать избыточные разрывы выпуска. Это означает, что *оптимальной* из всех комбинаций процентных ставок, которые ведут к возвращению инфляции на целевой уровень, является такая, при которой максимальный по модулю разрыв выпуска за два периода $t = 1, 2$ (то есть величина $\max(|x_1|,|x_2|)$) принимает минимальное значение.

а) *(5 баллов)* Представим, что у экономических агентов *адаптивные ожидания*, то есть $\pi_t^e = \pi_{t-1}$. Найдите все комбинации ставок i_1 и i_2, которые обеспечат возвращение инфляции к цели в год $t = 2$. Объясните содержательно, почему i_1 и i_2 связаны именно так. Укажите оптимальную для ЦБ комбинацию (i_1, i_2) и значения (x_1, x_2) при ней.

б) *(7 баллов)* Представим, что ожидания экономических агентов частично «заякорены» на цель ЦБ по инфляции: $\pi_t^e = \frac{\pi_{t-1}+\pi^\star}{2}$. Найдите все комбинации ставок i_1 и i_2, которые обеспечат возвращение инфляции к цели в год $t = 2$, и укажите оптимальную для ЦБ комбинацию (i_1, i_2) и значения (x_1, x_2) при ней. Сравните результаты с пунктом **а)** и содержательно объясните, как изменение механизма формирования инфляционных ожиданий повлияло на способность ЦБ обеспечить целевой уровень инфляции, минимизируя разрыв выпуска.

Решение

а) Первый период ($t = 1$):

Ожидания: $\pi_1^e = \pi_0 = 8$.

Разрыв выпуска: $x_1 = 2 - 0{,}5(i_1 - 8 - 4) = 8 - 0{,}5i_1$.

Инфляция: $\pi_1 = x_1 + 8 = 16 - 0{,}5i_1$.

Второй период ($t = 2$):

Ожидания: $\pi_2^e = \pi_1 = 16 - 0{,}5i_1$.

По условию цель достигнута, значит $\pi_2 = 4$.

Из уравнения Филлипса: $4 = x_2 + 16 - 0{,}5i_1 \Rightarrow x_2 = 0{,}5i_1 - 12$. Подставляем в уравнение IS для второго периода:

$x_2 = x_1 - 0{,}5(i_2 - \pi_2^e - 4)$

$0{,}5i_1 - 12 = 8 - 0{,}5i_1 - 0{,}5(i_2 - (16 - 0{,}5i_1) - 4)$

$0{,}5i_1 - 12 = 8 - 0{,}5i_1 - 0{,}5i_2 + 8 - 0{,}25i_1 + 2$

$0{,}5i_1 - 12 = 18 - 0{,}75i_1 - 0{,}5i_2$

Зависимость между ставками: $i_2 = 60 - 2{,}5i_1$.

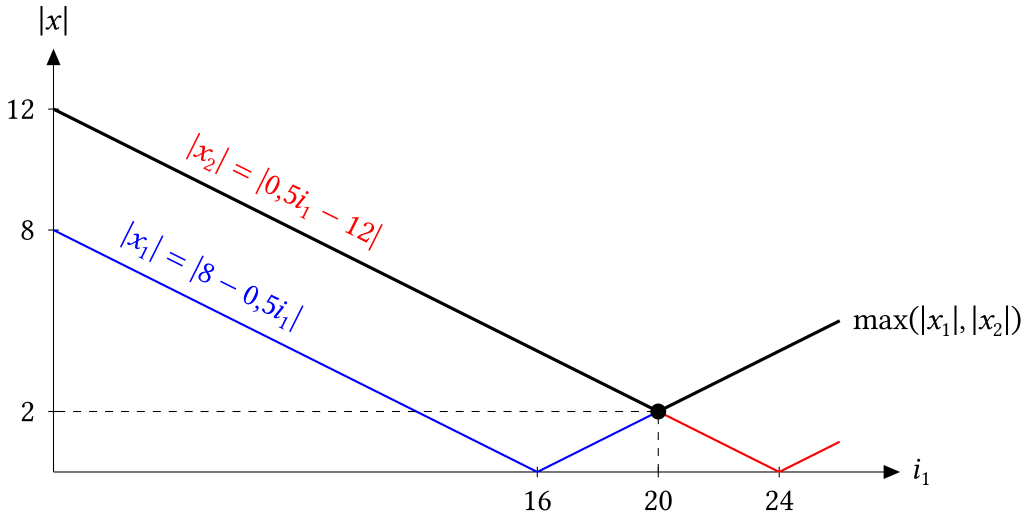
Содержательное объяснение: Между i_1 и i_2 существует отрицательная зависимость. Если ЦБ проводит мягкую политику сегодня (низкая i_1), это ведет к росту инфляции в первом периоде. Из-за адаптивности ожиданий высокая инфляция переносится на ожидания следующего года. Чтобы погасить этот инфляционный импульс и вернуть инфляцию к цели, ЦБ придется проводить намного более жесткую политику завтра (высокая i_2). Также можно отметить, что ставка i_1 влияет с коэффициентом $2{,}5 > 1$. Это можно объяснить тем, что рост первой ставки ведет к снижению инфляции в первом периоде, за счет чего во втором периоде необходимо сократить инфляцию на меньшую величину, а также происходит снижение инфляционных ожиданий на второй период, что также ведет к падению π_2.

Оптимизация:

ЦБ минимизирует максимальное отклонение $\max(|x_1|, |x_2|)$. Заметим, что сумма разрывов постоянна: $x_1 + x_2 = (8 - 0{,}5i_1) + (0{,}5i_1 - 12) = -4$.

Минимум максимального по модулю отклонения для суммы, равной константе, всегда достигается при равенстве значений: $x_1 = x_2$. $8 - 0{,}5i_1 = 0{,}5i_1 - 12 \Rightarrow i_1 = 20\,\%$. Тогда $x_1 = -2$ и $x_2 = -2$. Максимальное отклонение равно 2.

Графически ситуация сводится к следующему:



Ставка второго периода: $i_2 = 60 - 2{,}5 \cdot 20 = 10\,\%$.

Оптимальная комбинация для ЦБ: $i_1 = 20\,\%$, $i_2 = 10\,\%$. Значения выпуска: $x_1 = -2, x_2 = -2$.

б) Первый период ($t = 1$):

Ожидания: $\pi_1^e = \frac{8+4}{2} = 6$.

Разрыв выпуска: $x_1 = 2 - 0{,}5(i_1 - 6 - 4) = 7 - 0{,}5i_1$.

Инфляция: $\pi_1 = x_1 + 6 = 13 - 0{,}5i_1$.

Второй период ($t = 2$):

Ожидания: $\pi_2^e = \frac{13-0{,}5i_1+4}{2} = 8{,}5 - 0{,}25i_1$.

Цель достигнута: $\pi_2 = 4$.

Из уравнения Филлипса: $4 = x_2 + 8{,}5 - 0{,}25i_1 \Rightarrow x_2 = 0{,}25i_1 - 4{,}5$.

Подставляем в уравнение IS:

$0{,}25i_1 - 4{,}5 = 7 - 0{,}5i_1 - 0{,}5(i_2 - (8{,}5 - 0{,}25i_1) - 4)$

$0{,}25i_1 - 4{,}5 = 7 - 0{,}5i_1 - 0{,}5i_2 + 6{,}25 - 0{,}125i_1$
$0{,}25i_1 - 4{,}5 = 13{,}25 - 0{,}625i_1 - 0{,}5i_2$
Зависимость между ставками: $i_2 = 35{,}5 - 1{,}75i_1$.

Оптимизация: Минимизируем функцию $f(i_1) = \max(|7 - 0{,}5i_1|, |0{,}25i_1 - 4{,}5|)$. Точка глобального минимума также находится на пересечении графиков, где $x_1 = x_2$:

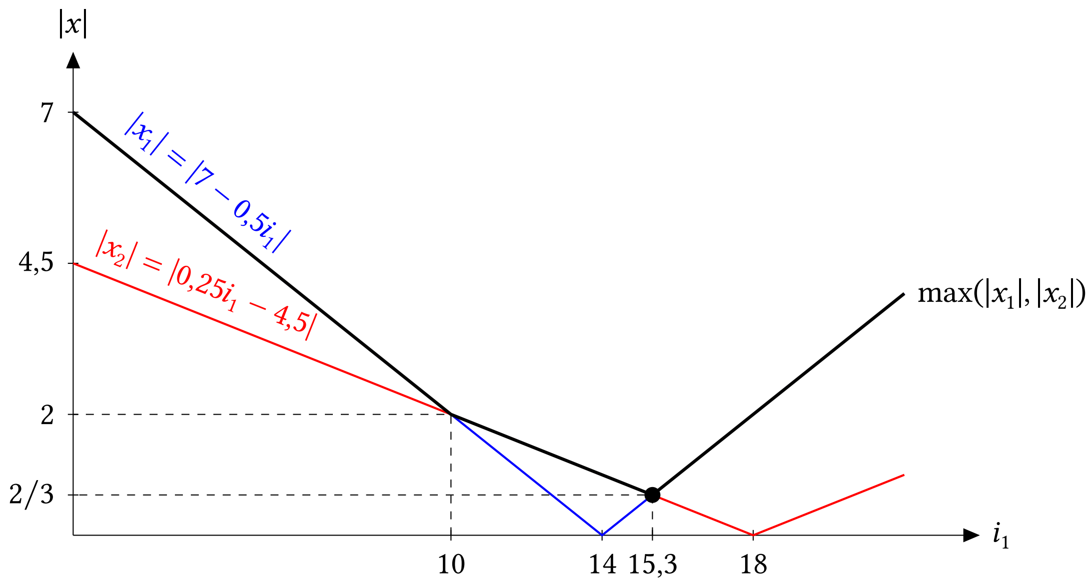
$$7 - 0{,}5i_1 = 0{,}25i_1 - 4{,}5 \Rightarrow 0{,}75i_1 = 11{,}5 \Rightarrow i_1 = \frac{46}{3}\,\% \approx 15{,}33\,\%.$$

Ставка второго периода: $i_2 = 35{,}5 - 1{,}75 \cdot \frac{46}{3} = \frac{71}{2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{46}{3} = \frac{426-322}{12} = \frac{26}{3}\,\% \approx 8{,}67\,\%$.

Оптимальная комбинация для ЦБ: $i_1 = 15{,}33\,\%$, $i_2 = 8{,}67\,\%$. Значения выпуска: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Также имеется второе решение, которое можно найти из условия $x_1 = -x_2$. Получаем ставки $i_1 = 10\,\%$, $i_2 = 18\,\%$. Однако эта точка не подходит, поскольку величина потерь в этом случае оказывается больше.

Графически ситуация сводится к следующему:



Сравнение и экономическая интерпретация:

В пункте а) ЦБ был вынужден допустить сильный спад экономики ($x_1 = -2, x_2 = -2$), чтобы подавить инфляцию. Частичное заякоривание ожиданий (пункт б) означает, что агенты доверяют цели ЦБ (4 %). Это доверие в нашем случае (когда инфляция повышена) само по себе выступает фактором торможения инфляции: ожидаемая инфляция в первом периоде оказывается ниже, что оказывает дезинфляционный эффект и в первом, и во втором периоде (теперь инфляционные ожидания превышают целевой уровень не на 4 процентных пункта, а на 2). За счет этого центральный банк может поставить более низкие ставки по сравнению с пунктом а). В результате издержки приведения инфляции к цели существенно снижаются. Центральному банку больше не требуется столь сильно охлаждать экономику (разрыв выпуска составил всего $-\frac{2}{3}$ в каждом периоде вместо -2), устанавливая столь высокие процентные ставки (15,33 % и 8,67 % вместо 20 % и 10 %).

Схема проверки

а) Всего за пункт 5 баллов, из них:

К1 Корректно выписаны все необходимые уравнения для x_1, π_1, x_2, π_2 → 1 балл

К2 Получена зависимость $i_2 = 60 - 2{,}5i_1$ → 1 балл

К3 Дано содержательное объяснение отрицательной связи ставок (размен мягкой ДКП сегодня на жесткую ДКП завтра из-за роста ожиданий) → 1 балл

Комментарий. Засчитывается также верное объяснение величины коэффициента. Без четкого указания, за счет чего происходит перенос эффекта из периода в период, ответ не засчитывается.

К4 Сформулировано условие оптимума (приравнены x_1 и x_2) → 1 балл

К5 Корректно найдена оптимальная комбинация ставок ($i_1 = 20\,\%, i_2 = 10\,\%$) и верно найдены значения выпуска $x_1 = x_2 = -2$ → 1 балл

Комментарий. Балл ставился только при наличии всех верных значений. Ответ $x_1 = x_2 = 2$ не засчитывался, поскольку при сдерживающей монетарной политике невозможно получить инфляционный разрыв выпуска.

б) Всего за пункт 7 баллов, из них:

К6 Корректно выписаны все необходимые уравнения для x_1, π_1, x_2, π_2 с учетом частично заякоренных ожиданий → 1 балл

К7 Получена верная зависимость $i_2 = 35{,}5 - 1{,}75i_1$ → 1 балл

К8 Корректно найдены оптимальные ставки $i_1 = 46/3\,\%$ (или $15{,}33\,\%$) и $i_2 = 26/3\,\%$ (или $8{,}67\,\%$) и разрывы выпуска $x_1 = x_2 = -2/3$ → 1 балл

К9 Получено второе решение и указано, что оно не подходит → 1 балл

К10 Явно и корректно указано сравнение ставок и разрывов выпуска в двух случаях →1 балл

К11 Дано подробное экономическое объяснение механизма → 2 балла

Общие комментарии к проверке.

- Арифметическая ошибка, которая не привела к изменению экономического смысла результатов, штрафуется в 1 балл. Если ошибка привела к изменению экономического смысла, то не засчитываются все последующие пункты, на которые данный результат повлиял.
- Если в работе указаны положительные разрывы выпуска (например, $x_1 = x_2 = 2$ в п. а)), то данный ответ считается неправильным и противоречащим экономическому смыслу задачи, поэтому баллы за нахождение решения, сравнение результатов пунктов и объяснение изменений не ставятся.

Задача *Инновации и антимонопольное регулирование (9-11 класс) (12 баллов)*

На рынке миелофонов конкурируют две фирмы-производителя: «Крыс» и «Весельчак». Изначально обе фирмы производят устройства с постоянными предельными издержками $MC = 2$ коина за штуку.

Каждая из фирм может вложить $FC = 100$ коинов в научные исследования. В результате с вероятностью $1/2$ ей (независимо[1] от успеха конкурента) удастся разработать новую технологию, которая позволит снизить издержки на производство каждого миелофона до $MC = 1$ коин за штуку. Фирмы принимают решение об инвестициях одновременно. После того как решения приняты и новые технологии (в случае успеха) внедрены, фирмы производят и продают свою продукцию в течение двух лет.

Спрос на миелофоны абсолютно неэластичен и составляет $Q = 300$ устройств в год. Потребителям неважно, кто именно произвел миелофон, они купят его у того, кто продаст дешевле. Если издержки фирм одинаковы, конкуренция приводит к тому, что цена падает до уровня издержек и экономическая прибыль обеих фирм становится равна нулю. Если же издержки различны, то производитель с меньшими издержками может назначить цену, чуть меньшую предельных издержек конкурента, вытеснить его с рынка и получить положительную прибыль. Для упрощения расчетов считайте, что для вытеснения конкурента фирме с низкими издержками достаточно поставить цену, *равную* предельным издержкам другой фирмы.

Каждая фирма стремится максимизировать математическое ожидание своей суммарной прибыли (с учетом затрат на исследования) за два года.

а) *(5 баллов)* Будут ли фирмы инвестировать в исследования? Какова вероятность того, что в отрасли появится новая технология?

б) *(7 баллов)* Государство приняло антимонопольный закон, обязывающий фирму, разработавшую новую технологию, сделать ее доступной для всех конкурентов через год после внедрения у себя. Как это повлияет на вероятность появления новой технологии в отрасли по сравнению с пунктом **а)**? (В какую сторону и на сколько она изменится?)

Решение

а) Найдем ожидаемую прибыль фирмы от инвестиций. Чтобы получить положительную операционную прибыль, фирма должна стать *единственным* обладателем новой технологии. Вероятность этого события при условии, что инвестируют обе фирмы, равна произведению вероятности собственного успеха на вероятность неудачи конкурента: $1/2 \cdot (1 - 1/2) = 1/4$.

Если фирма становится единственным лидером, она устанавливает цену $P = 2$ (на уровне издержек отстающего конкурента) и продает $Q = 300$ единиц. Ее прибыль за один год составит: $(2 - 1) \cdot 300 = 300$ коинов. За два года суммарная операционная прибыль составит $300 \cdot 2 = 600$ коинов.

Ожидаемая чистая прибыль (с учетом затрат на НИОКР) при обоюдных инвести-

[1] Вероятность того, что из двух *независимых* событий произойдут оба, равна произведению вероятностей этих событий.

циях: $E(\pi) = \frac{1}{4} \cdot 600 - 100 = 150 - 100 = 50$ коинов.

Так как ожидаемая прибыль положительна ($50 > 0$), фирме выгодно инвестировать, даже если конкурент тоже инвестирует. Если же конкурент откажется от инвестиций, вероятность стать единоличным лидером возрастает до $1/2$, и ожидаемая прибыль составит $\frac{1}{2} \cdot 600 - 100 = 200 > 0$. Таким образом, инвестиции — доминирующая стратегия. В равновесии **обе фирмы будут инвестировать**.

Вероятность того, что новая технология появится в отрасли (успеха добьется хотя бы одна фирма), равна: $P_{innov} = 1 - P(\text{обе потерпят неудачу}) = 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

б) Из-за нового закона фирма, победившая в технологической гонке, сможет пользоваться своим преимуществом только один первый год. На второй год технология станет общедоступной, издержки обеих фирм сравняются ($MC = 1$), цена упадет до 1, и прибыль обнулится.

Если обе фирмы инвестируют, ожидаемая чистая прибыль теперь составит: $E(\pi) = \frac{1}{4} \cdot (\text{прибыль за 1 год}) - 100 = \frac{1}{4} \cdot 300 - 100 = 75 - 100 = -25$ коинов. Поскольку ожидаемая прибыль отрицательна, ситуация, в которой инвестируют обе фирмы, больше не является равновесием.

Проверим, выгодно ли инвестировать только одной фирме (если вторая отказывается). Вероятность ее успеха составит $1/2$. Ожидаемая чистая прибыль: $E(\pi) = \frac{1}{2} \cdot 300 - 100 = 150 - 100 = 50$ коинов. Это больше нуля, значит, одной фирме инвестировать выгодно. В равновесии **инвестировать будет только одна фирма**.

Теперь вероятность появления новой технологии зависит только от одной фирмы и составляет $1/2 = 50\%$. **Вывод:** вероятность **снизилась** на 25%, с 75% до 50%.

Другой вариант состоит в том, что фирмы пользуются смешанными стратегиями — инвестируют с некоторыми вероятностями. Чтобы фирме было выгодно так действовать, она должна получать одинаковую чистую прибыль, делая инвестиции или воздерживаясь от них. Пусть фирма 2 инвестирует с вероятностью α. Тогда ожидаемая чистая прибыль фирмы 1, инвестирующей в НИОКР, составляет $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) \cdot 300 - 100 = 50 - 75\alpha$ коинов. Фирме 1 безразлично, инвестировать или нет, если эта величина равна нулю, т.е. при $\alpha = \frac{2}{3}$. Таким образом, возможно равновесие Нэша в смешанных стратегиях в игре между фирмами: каждая фирма инвестирует в НИОКР с вероятностью $\frac{2}{3}$. При этом она разрабатывает новую технологию лишь с вероятностью $\frac{1}{3}$. В итоге новая технология появляется, если это получается хотя бы у одной фирмы, что происходит с вероятностью $1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$. Эта вероятность также меньше, чем $\frac{3}{4}$, т.е. вероятность снизилась по сравнению с п. а) (на $\frac{3}{4} - \frac{5}{9} = \frac{7}{36}$), как и в случае равновесия в чистых стратегиях, когда только одна фирма инвестирует.

Примечание: Этот пример является упрощенным вариантом модели эндогенного роста Ф. Агийона и П. Ховитта. Он показывает, что излишне жесткая антимонопольная политика может снизить стимулы к инновациям и затормозить технологический прогресс.

Схема проверки

а) Всего за пункт (а) 5 баллов, из них:

K1 Верно рассчитана ожидаемая прибыль при инвестировании обеих фирм (50 коинов) → 2 балла

K2 Рассчитана ожидаемая прибыль 200 коинов (или показано, что она положительна) в случае, если фирма-конкурент не инвестирует → 1 балл

K3 Сделан обоснованный вывод о том, что в равновесии инвестируют обе фирмы → 1 балл

K4 Верно рассчитана вероятность появления технологии (75%), если равновесие “обе фирмы инвестируют” было получено корректно → 1 балл

K5 Некорректно учтены издержки (без изменения выводов) → не более 2 баллов из 5

K6 Сравнение выигрышей только при одинаковых действиях фирм (как будто они кооперируются) → не более 2 баллов из 5

K7 Арифметическая ошибка в п. а), не влияющая на выводы → −1 балл

K8 Показано, что при обоюдных инвестициях ожидаемая прибыль становится отрицательной (−25 коинов) → 2 балла

K9 Показано, что если инвестирует одна фирма, её ожидаемая прибыль положительна (50 коинов) → 2 балла

K10 Сделан верный вывод, что в новом равновесии инвестирует только одна фирма (или что каждая фирма инвестирует с вероятностью $\frac{2}{3}$, если найдено смешанное равновесие) → 2 балла

K11 Верно рассчитаны новая вероятность появления технологии (50%) (или $\frac{5}{9}$ в случае смешанного равновесия) и её снижение по сравнению с п. а) (на 1/4 или 7/36) → 1 балл

K12 Для получения полного балла за п. б) достаточно правильно ответить на поставленные вопросы для хотя бы одного из равновесий, чистого или смешанного.

K13 Сравнение выигрышей только при одинаковых действиях фирм (как будто они кооперируются) → не более 2 баллов из 7

K14 Арифметическая ошибка в п. б), не влияющая на выводы → −1 балл

K15 Для обоих пунктов: неправильно понято условие задачи (решается другая задача) → 0 баллов за задачу

Задача *Торговля с ограничениями (9-11 класс)* *(12 баллов)*

В мире существуют две страны — Альфа и Бета. Они производят и потребляют два товара: X и Y. Технологии стран различаются, кривые производственных возможностей задаются следующими уравнениями: для страны Альфа $X_A^2 + 2000Y_A = 1\,200\,000$, для страны Бета $X_B^2 + 400Y_B = 480\,000$.

Предпочтения потребителей в обеих странах одинаковые. Они потребляют товары строго комплектами в пропорции 1:1, то есть функция полезности имеет вид $U = \min(X, Y)$.

Считайте, что во всех обменах цена товара Y равна 1, а цена товара X обозначается как p. При решении этой задачи численные значения цен и объемов можно округлять до первого знака после запятой.

а) *(4 балла)* Представим, что страны открывают границы и торгуют без ограничений, при этом цена устанавливается на уровне равновесия совершенной конкуренции. Найдите мировую цену $p^\star$, объемы производства, потребления и экспорта (импорта) товара X для каждой страны.

б) *(4 балла)* Правительство страны, ставшей импортером товара X, решает начать «торговую войну» с целью увеличить собственное производство этого товара. Для этого оно вводит потолок цены $\overline{p}$ на импорт на уровне $0{,}9p^\star$. Выиграют ли потребители в этой стране по сравнению со свободной торговлей?

в) *(4 балла)* Правительство решает опустить потолок цены еще ниже, до уровня $\hat{p} = 2p^\star/3$. Выиграют ли потребители страны-импортера товара X по сравнению со свободной торговлей и с потолком $\overline{p}$ теперь?

Решение

а) Равновесие свободной торговли.

1 способ: Перепишем КПВ обеих стран через Y. Страна Альфа:

$$Y_A = 600 - \frac{X_A^2}{2000}$$

Страна Бета:

$$Y_B = 1200 - \frac{X_B^2}{400}$$

В равновесии сложится ситуация, в которой альтернативные издержки (производные по X по модулю) в обеих странах, сравняются при выбранных ими объемах производства с отношением цен, равным p:

$$\frac{X_A}{1000} = \frac{X_B}{200} = p$$

Отсюда $X_A = 1000p$ и $X_B = 200p$, или $X_A = 5X_B$.

Из баланса суммарного производства и потребления обоих товаров получаем

$$X_A + X_B = 6X_B = Y_A + Y_B = 600 - \frac{X_A^2}{2000} + 1200 - \frac{X_B^2}{400} =$$

$$= 600 - \frac{25X_B^2}{2000} + 1200 - \frac{X_B^2}{400} = 1800 - \frac{3X_B^2}{200}$$

Из уравнения $1800 - \frac{3X_B^2}{200} - 6X_B = 0$ (или, преобразовав, $X_B^2 + 400X_B - 120000 = 0$) получаем объем производства товара X.

$$X_B = 200$$

Тогда $X_A = 1000$ (соответствующие объемы производства второго товара в странах: $Y_A = 100$ и $Y_B = 1100$).

Цена равна

$$p^{\star} = \frac{X_A}{1000} = \frac{1000}{1000} = 1$$

Очевидно, что с учетом функции полезности и объемов производства товаров, экспортером товара X будет страна Альфа, а импортером - страна Бета.

Потребление товара X в странах и величину экспорта найдем, например, из равенства экспорта и импорта (с учетом их стоимости и равенства потребления X и Y) для страны Бета:

$$ImX_B = p(X_B^c - 200) = X_B^c - 200 = ExY_B = 1100 - Y_B^c = 1100 - X_B^c$$

Отсюда

$$X_B^c = Y_B^c = 650,$$

$$ImX_B = ExX_A = 450,$$

$$X_A^c = 1000 - ExX_A = 550 = Y_A^c$$

2 способ: Определив $X_A = 1000p$ и $X_B = 200p$, запишем КПВ через p

$$Y_A = 600 - 500p^2, Y_B = 1200 - 100p^2$$

Тогда бюджетное ограничение стран $I = pX + Y$ запишется

$$I_A = 600 + 500p^2, I_B = 1200 + 100p^2$$

Наконец, спрос на X в странах (с учетом равенства потребления X и Y)

$$X_A^c = \frac{600 + 500p^2}{p + 1}$$

$$X_B^c = \frac{1200 + 100p^2}{p + 1}$$

Получаем зависимость экспорта и импорта от цены товара X - экспорт из Альфы – «готовность страны Альфа поставить товар» (аналог предложения):

$$ExX_A(p) = 1000p - \frac{600 + 500p^2}{p + 1} = \frac{500p^2 + 1000p - 600}{p + 1}$$

- импорт в Бету – «готовность страны Бета купить товар» (аналог спроса):

$$ImX_B(p) = \frac{1200 + 100p^2}{p+1} - 200p = \frac{1200 - 200p - 100p^2}{p+1}$$

В равновесии получаем:

$$ExX_A(p) = ImX_B(p) \Rightarrow 600p^2 + 1200p - 1800 = 0 \Rightarrow p^2 + 2p - 3 = 0$$

Корень: $p^\star = 1$. Отсюда находим все требуемое: объемы производства, потребления и экспорта товара X.

б) Мягкий потолок $\overline{p} = 0{,}9$. Готовность Альфы поставлять товар по этой цене:

$$ExX_A(0{,}9) = \frac{500 \cdot 0{,}81 + 1000 \cdot 0{,}9 - 600}{1{,}9} = \frac{705}{1{,}9} \approx 371{,}05$$

Желание страны Бета получить товар по этой цене:

$$ImX_B(0{,}9) = \frac{1200 - 200 \cdot 0{,}9 - 100 \cdot 0{,}81}{1{,}9} = \frac{939}{1{,}9} \approx 494{,}2$$

Возникает ситуация дефицита товара X: в страну Бета будут поставлять лишь 371 единиц товара X. Далее находим внутреннее производство в стране Бета из баланса потребления товаров X и Y:

$$X_B + 371 = Y_B - 0{,}9 \cdot 371 = 1200 - \frac{X_B^2}{400} - 333{,}9$$

Отсюда $X_B \approx 287{,}8$. Потребление X составит $287{,}8 + 371 = 658{,}8$ – этот объем больше потребления в пункте (а), поэтому потребители в Бете выиграли.

Можно было сразу найти объем потребления из следующего выражения:

$$X_B^c = Y_B^c = 1200 - \frac{(X_B^c - 371)^2}{400} - 333{,}9$$

Отсюда $X_B^c = 658{,}8$.

в) Жесткий потолок $\hat{p} = 2/3$. Готовность Альфы поставлять товар по этой цене:

$$ExX_A(2/3) = \frac{500 \cdot 4/9 + 1000 \cdot 2/3 - 600}{5/3} = \frac{520}{3} \approx 173{,}3$$

Желание страны Бета получить товар по этой цене:

$$ImX_B(2/3) = \frac{1200 - 200 \cdot 2/3 - 100 \cdot 4/9}{5/3} = \frac{1840}{3} \approx 613{,}3$$

Снова имеем дело с дефицитом товара X: в страну Бета будут поставлять лишь 173,3 единиц товара X. Далее находим внутреннее производство в стране Бета из баланса потребления товаров X и Y:

$$X_B + 173{,}3 = Y_B - \frac{2}{3} \cdot 173{,}3 = 1200 - \frac{X_B^2}{400} - 115{,}6$$

Отсюда $X_B \approx 436$. Потребление X составит $436 + 173{,}3 = 609{,}3$ – этот объем меньше потребления и в пункте (а), и в пункте (б), поэтому потребители в Бете проиграли.

Схема проверки

а) Всего за пункт 4 балла, из них:

K1 Записаны условия равновесия $\frac{X_A}{1000} = \frac{X_B}{200} = p$ или $X_A = 1000p$ и $X_B = 200p \to 1$ балл

K2 Найдена (любым корректным способом) равновесная мировая цена $p^{\star} = 1 \to 2$ балла

K3 Рассчитаны равновесные объемы производства и потребления (одно из четырех чисел может быть пропущено при условии, что из решения видно, как найти пропущенное), а также величина экспорта X в страну Бета $\to$ 1 балл

б) Всего за пункт 4 балла, из них:

K4 Рассчитан объем экспорта Альфы при цене 0,9 ($ExX_A \approx 371{,}05$) $\to$ 1 балл

K5 Найдено оптимальное внутреннее производство Беты ($X_B \approx 287{,}8$) $\to$ 2 балла

K6 Определение величины потребления X в стране Бета ($X_B^c \approx 658{,}8$) и сделан верный вывод о выигрыше $\to$ 1 балл

K7 Если участник вычислял потребление минуя производство, он получает и К5, и К6

K8 Если при вычислении внутреннего производства в стране участник исходил из равенства $\frac{X_B}{200} = p$, то он не получает баллов по К5 и К6

K9 Если, вычислив верное потребление, вывод был неверным (потребители проиграли), то К6 не засчитывается

в) Всего за пункт 4 балла, из них:

K10 Рассчитан объем экспорта Альфы при цене 2/3 ($ExX_A \approx 173{,}3$) $\to$ 1 балл

K11 Найдено оптимальное внутреннее производство Беты ($X_B \approx 436$) $\to$ 2 балла

K12 Определение величины потребления X в стране Бета ($X_B^c \approx 609{,}3$) и сделан верный вывод о проигрыше $\to$ 1 балл

K13 Если участник вычислял потребление минуя производство, он получает и К11, и К12

K14 Если при вычислении внутреннего производства в стране участник исходил из равенства $\frac{X_B}{200} = p$, то он не получает баллов по К11 и К12

K15 Если после вычисления верного потребления вывод был неверным (потребители выиграли), то К12 не засчитывается

Задача *Выбираем самое милое животное (9-11 класс)* *(12 баллов)*

Одна радиостанция в 2010 году провела эксперимент среди своих радиослушателей. Всем участникам предлагалось посмотреть три милых видео: с котенком, с толстым лори и с медвежонком. После этого участников разделили на две группы случайным образом. Участников из первой группы попросили выбрать самое милое животное с их точки зрения, а из второй — угадать, какое животное окажется наиболее популярным у участников первой группы. Если член второй группы угадывает правильно, он получает приз. Результаты приведены в таблице:

	Первая группа	**Вторая группа**
Котенок	50 %	75 %
Толстый лори	27 %	15 %
Медвежонок	23 %	10 %

У каждого радиослушателя есть строгие предпочтения на множестве животных, то есть каждый может проранжировать самого милого, второго и третьего по милоте. Каждый радиослушатель знает свои предпочтения, но не знает наверняка, как распределены предпочтения остальных.

а) *(2 балла)* Какой механизм приводит к тому, что результаты в двух группах могли оказаться такими разными?

б) *(2 балла)* Предположим, что после публичного объявления результатов организаторы решили провести аналогичное голосование среди тех же самых групп радиослушателей еще раз. Какие результаты голосования в второй группе можно ожидать во втором эксперименте? Объясните, какой механизм стоит за вашей гипотезой.

в) *(2 балла)* Предположим, что в этом эксперименте была бы третья группа, которая пыталась бы угадать победителя голосования во второй группе, а угадавшие правильно получали бы приз. Какие результаты голосования вы бы ожидали в первом и втором раундах в третьей группе?

г) *(6 баллов)* Приведите пример, где в экономике работают механизмы принятия решений, аналогичные механизмам из этой задачи. Четко выделите, какие группы экономических агентов являются в вашем примере аналогами первой и второй группы участников эксперимента на радиостанции. Укажите, как устроены множество альтернатив и предпочтения агентов в вашем примере. Опишите механику, действующую в вашем примере и аналогичную выборам милого животного на радиостанции. Наконец, приведите последствия принятых решений для экономических агентов из каждой группы в вашем примере. Запишите ответ в следующем виде:

- Экономическое взаимодействие:
- Аналог первой группы:
- Аналог второй группы:
- Альтернативы:
- Как устроено принятие решений:
- Ключевые последствия принятых решений:

Решение

Описанный в задаче эксперимент (который в 2010 году был проведен программой Planet Money Национального общественного радио) иллюстрирует идею «Кейнсианского конкурса красоты» (Keynesian beauty contest) – это одна из самых известных стратегических концепций в экономической науке. В «Общей теории занятости...» Кейнс сравнил инвесторов с участниками газетного конкурса красоты: «таким образом, каждый участник должен выбрать не те лица, которые он сам считает самыми красивыми, а те, которые, по его мнению, с наибольшей вероятностью понравятся другим участникам, которые все смотрят на проблему с одной и той же точки зрения... Мы достигли третьей степени, где мы направляем свой интеллект на предвидение того, чего ожидает среднестатистическое мнение. И есть, я полагаю, те, кто практикует четвертую, пятую и более высокие степени.» После появления в 1980х годах формальных моделей «Кейнсианского конкурса красоты» он многократно реализовывался в виде исследовательских или социальных экспериментов.

а) *(2 балла)* В первой группе участники действуют искренне: каждый выбирает альтернативу, которая максимизирует его личную полезность (самое милое животное по строгим предпочтениям). Поэтому итоговое распределение голосов в первой группе приближенно отражает доли людей, для которых соответствующее животное — лучший вариант.

Во второй группе цель иная: участник получает приз, если его выбор совпадает с самым популярным выбором в первой группе. Следовательно, рациональный участник второй группы выбирает не «самое милое лично для него», а вариант, который, по его мнению, с наибольшей вероятностью станет победителем в первой группе. Конечно, он мог бы спрогнозировать «наивно» – на основе своих личных предпочтений (или подбрасыванием кубика), но если ему доступна какая-то информация о предпочтениях окружающих, он их учтет в своем прогнозе (для этого есть стимулы). Источником дополнительной информацией может быть какой-то сетевой эффект, опрос случайных знакомых, опора на стереотипы. При этом во второй группе возникает координация на популярной альтернативе: часть из тех, кто понимает, что предпочитает непопулярную альтернативу, может рационально выбрать популярную. Такая логика «ожиданий ожиданий» усиливает концентрацию голосов на одном варианте. Из-за этого механизма доля котенка во второй группе существенно выше, чем доля котенка как искреннего выбора в первой группе (75% против 50%).

б) *(2 балла)* После объявления итогов первого раунда участники из второй группы получают дополнительную информацию: в первой группе победил котенок. Все обновляют свои ожидания о предпочтениях членов первой группы. Теперь рациональный выбор во второй группе — голосовать за котенка, поскольку это позволяет получить приз. В предположениях о рациональности во втором запуске можно ожидать, что доля голосов котенка во второй группе близка к 100%.

в) *(2 балла)* **Первый раунд:** Третья группа решает задачу «угадай победителя во второй группе». Во второй группе, в свою очередь, каждый участник пытается угадать победителя в первой группе. В третьей группе возникает еще один уровень ожиданий: «я выбираю то, что выбирают те, кто угадывает выбор других». Другими словами, участники третьей группы учитывают не только то, что у них есть свои предпочтения и ожидания о победителе в первой группе, но и то, что участники второй группы, поведение которых они угадывают, уже проделали этот учет ожиданий в своих голосах. Таким образом, можно считать, что в третьей группе доля голосов за победителя может быть не меньше, а скорее даже больше, чем во второй.

Второй раунд: После первого запуска становятся известны результаты. Третья группа перед вторым раундом получает «сигнал», что в первой группе побеждает котенок, а вторая группа (получив тот же сигнал) почти в полном составе проголосует за котенка. Следовательно, третья группа ожидает, что рациональные представители второй группы выберут котенка. Значит, почти 100% членов третьей группы проголосуют за котенка во втором раунде.

г) *(6 баллов)* Возможный пример должен использовать ключевые свойства механизма принятия решений, который можно сформулировать на основе предшествующих пунктов: а) у участников рынка существуют предпочтения (основанные на вкусах или каких-то прогнозных оценках) на множестве экзогенно заданных альтернатив, б) существуют игроки, которые могут стратегически учитывать в своих решениях агрегированные предпочтения остальных участников (что нравится большинству).

Например:

- **Экономическое взаимодействие:** Торговля на фондовом рынке акций или иных активов.
- **Аналог первой группы:** Фундаментальные инвесторы. Они покупают актив, который кажется им лучшим по фундаментальным причинам (ожидаемые дивиденды, прибыль, низкий риск и т.п.).
- **Аналог второй группы:** Спекулянты / краткосрочные трейдеры. Они покупают актив, который, по их мнению, будет позднее покупать большинство фундаментальных инвесторов (или большинство других участников рынка), чтобы заработать на росте цены. (! Им может быть выгодно это сделать, даже если они сами не считают этот актив перспективным, достаточно, чтобы они верили в оптимизм других, пусть даже и ошибочный – тот самый animal spirit).
- **Альтернативы:** Купить актив A, купить актив B.
- **Как устроено принятие решений:** Решения представителей первой группы основаны на фундаментальной оценке. Кто-то предпочитает актив A, кто-то — актив B. Предпочтения второй группы не зависят от фундаментальной оценки, а зависят от вероятности того, что актив станет массово покупаемым и вырастет в цене.
- **Ключевые последствия принятых решений:** Отклонение цен от фундаментальной стоимости, самоусиливающиеся тренды (пузыри). Если актив считается «тем, который купят другие», его действительно массово покупают спекулянты, что толкает цену вверх и подтверждает первоначальные ожидания.

Схема проверки

а) Всего за пункт (а) 2 балла, из них:

- К1: Верно указан любой механизм, который помог бы участникам второй группы верно спрогнозировать победителя – убеждения, основанные на стереотипах, опрос случайных знакомых и т.д. → 2 балла

б) Всего за пункт (б) 2 балла, из них:

- К2: Верно указано, как обновление информации позволило участникам второй группы сделать более точный прогноз. → 2 балла

в) Всего за пункт (в) 2 балла, из них:

- К3: Верно сформулировано, почему можно ожидать, что среди участников третьей группы доля голосов за котенка в первом раунде должна быть не меньше, чем у второй группы, а, возможно, и больше. → 1 балл (Просто «большинство голосов за котенка» – не оценивается баллом).
- К4: Верно сформулировано, почему среди участников третьей группы доля голосов за котенка во втором раунде должна еще вырасти по сравнению с первым раундом. → 1 балл

г) Всего за пункт (г) 6 баллов.

К5: Предложенный пример должен отвечать основным свойствам модели, указанным в решении, в том смысле, что не каждая ситуация недостатка информации является иллюстрацией «конкурса красоты». Если в указанном примере не было нестратегических игроков (аналога группы 1), группа 2 могла формировать набор альтернатив для группы 1, у групп были разные наборы альтернатив, ситуация не предполагала распределения предпочтений на альтернативах – пример не засчитывался как верный. (По этим основаниям не засчитываются, в частности, примеры с олигополией, маркетинговые исследования предпочтений потребителей, формирование политики ЦБ).

К6: Также не оцениваются примеры гипотетических ситуаций, повторяющих конкурс из условия (*ресторан проводит акцию среди посетителей на любимое блюдо, на концерте устроен конкурс на определение лучшей песни* и т.д.)

Полный балл за этот пункт выставлялся, если явным образом были выполнены следующие пункты по требуемой структуре ответа:

- К7: Верно описано подходящее экономическое взаимодействие → 1 балл
- К8: Корректно описан аналог первой группы → 1 балл
- К9: Корректно описан аналог второй группы → 1 балл
- К10: Корректно названы альтернативы → 1 балл
- К11: Верно описано устройство принятия решений двумя группами, предполагая, что одна действует более «стратегично», чем другая → 1 балл
- К12: Верно описаны возможные такого принятия решений в рамках заданного экономического взаимодействия → 1 балл

Задача *Делим неделимое (9 класс)* *(12 баллов)*

Распределение благ между экономическими агентами — одна из важнейших задач экономики.

Рассмотрим распределение конечного набора неделимых благ между агентами. $v_i(X) \geqslant 0$ — полезность, которую агент i получает от блага X. Если агент имеет несколько благ, то их полезности для него суммируются.

Важным критерием успешного дележа является нежелание каждого агента оспорить этот дележ. Один из способов смотреть на это — дележи без зависти: никто из агентов не хотел бы получить чужой набор благ вместо своего. Сформулируем два условия дележа без зависти:

1. Каждое благо целиком достается ровно одному агенту.
2. Полезность агента i от имеющихся у него благ не меньше, чем была бы его же полезность от набора благ, имеющегося у любого другого агента.

а) *(3 балла)* Приведите три примера (агенты и блага) из жизни, где такой дележ может применяться и быть полезен, и объясните их.

б) *(1 балл)* Найдите дележ без зависти для следующего примера с пятью благами и тремя агентами. В ответе укажите, какой набор благ достанется каждому из агентов.

	A	B	C	D	E
v_1	40	15	20	30	60
v_2	75	55	100	70	120
v_3	50	40	60	80	100

в) *(2 балла)* Найдите, при каких значениях параметра V в следующем примере с четырьмя благами и двумя агентами **не существует** дележа без зависти.

	A	B	C	D
v_1	55	20	25	V
v_2	40	10	20	35

г) *(6 баллов)* Как показал предыдущий пункт, дележ без зависти существует далеко не всегда, поэтому часто рассматривается более слабая его версия: дележ без *сильной* зависти. В нем условие отсутствия зависти ослабляется: для любой пары агентов, где первый завидует второму, первый перестанет завидовать, если у второго удалить из набора *любое* благо (то есть какое бы одно благо ни было удалено из чужого набора, зависть исчезнет). Докажите, что в случае двух агентов и произвольного числа благ дележ без сильной зависти существует всегда.

Решение

Примечание: Существует недоказанная гипотеза о существовании дележа без сильной зависти (EFx) для любого количества игроков и ресурсов. Это популярная нерешенная задача на стыке экономики, теории игр и computer science. Однако для двух игроков доказательство вполне доступно.

а) Возможные хорошие примеры:

1. Дележ наследства между родственниками (дома, драгоценности, памятные вещи);
2. Раздел совместно нажитого имущества при разводе;
3. Распределение рабочих задач/проектов между сотрудниками;
4. Распределение картин или других предметов искусства из общей коллекции по различным государственным музеям;
5. Распределение игрушек между детьми.

б) Нужно распределить ресурсы так, чтобы каждый оценивал свой набор не хуже наборов остальных.

Подходящий дележ без зависти:

- Агент 1 получает E (ценность $v_1(E) = 60$).
- Агент 2 получает A, C (ценность $v_2(A, C) = 75 + 100 = 175$).
- Агент 3 получает B, D (ценность $v_3(B, D) = 40 + 80 = 120$).

в) Если дележа без зависти не существует, каждое распределение благ, устраивающее второго игрока, вызывает у первого зависть.

Второго игрока устраивают распределения, при которых он получает блага AC, AD, CD, любые три или все блага. Заметим, что если первый игрок будет завидовать при первых трёх вариантах, то во всех остальных он точно будет завидовать (они все не лучше для 1 игрока). Так что нужно обеспечить зависть в первых трёх случаях:

- У 2 игрока AC, первый завидует $\Rightarrow V_1(AC) > V_1(BD) \;\Rightarrow\; 80 > V + 20 \;\Rightarrow\; V < 60$
- У 2 игрока AD, первый завидует $\Rightarrow V_1(AD) > V_1(BC) \;\Rightarrow\; 55 + V > 45 \;\Rightarrow\; V > -10$
- У 2 игрока CD, первый завидует $\Rightarrow V_1(CD) > V_1(AB) \;\Rightarrow\; 25 + V > 75 \;\Rightarrow\; V > 50$

Итого, делёж без зависти не существует для $V \in (50, 60)$.

г) Приведем одно из возможных решений.

Идейно алгоритм похож на классическую задачу «один делит, другой выбирает». Нам нужно доказать, что первый агент может так разделить множество ресурсов на два набора, что какой бы из них ни забрал второй агент, первый агент не будет испытывать *сильной* зависти. После этого второй агент забирает тот набор, который нравится ему больше, а первому достается оставшийся. Второй агент завидовать не будет в принципе (так как он сам выбрал лучший для себя вариант). Осталось показать, как первому составить такие наборы.

Будем рассматривать все ценности с точки зрения **первого** агента, который "делит". Упорядочим все ресурсы по убыванию их ценности для него. Будем по очереди (от самых ценных к наименее ценным) помещать ресурсы в два набора (изначально пустых). На каждом шаге очередной ресурс помещается в тот набор, суммарная ценность которого на данный момент меньше.

Рассмотрим момент окончания процесса. Пусть первый набор в итоге оказался для первого агента менее ценным, чем второй. Значит, он будет завидовать, если ему достанется первый. Однако разница в ценности наборов не может превышать ценности последнего помещенного во второй набор предмета (ведь перед тем, как его туда положить, второй набор был меньше первого). Так как мы сортировали предметы по убыванию, любой другой предмет во втором наборе имеет ценность не меньше этого последнего добавленного. Следовательно, удаление любого предмета из второго набора сделает его менее ценным, чем первый, и зависть исчезнет.

Схема проверки

а) 3 балла, по 1 баллу за каждый приведенный осмысленный пример с указанием агентов и благ. Если написано больше трех примеров, то оцениваются только первые три. Без объяснения неочевидных примеров ставится 0 баллов за аргумент.

Пример не засчитывается, если нарушено хотя бы одно из обязательных условий, в частности:

- Отсутствует сущность дележа (аукционы, конкурсы, гранты, квоты, мэтчинг, обмен, рыночное взаимодействие):
- Отсутствует распределение набора благ между агентами;
- Распределение осуществляется централизованно, без выбора агентов;
- Рассматриваются иные механизмы, не являющиеся дележом.
- Используются делимые блага без пояснения их неделимости в рамках примера, например еда, деньги, территория (без дополнительных ограничений).
- Нарушается аддитивность (суммирование) полезностей, а именно, получив одно благо, агент перестает получать полезность от следующих:
  - поступление в вузы;
  - распределение по факультетам.
- Дублирование аргументов. Приведённые примеры по сути описывают одну и ту же ситуацию (содержательно не различаются). В этом случае засчитывается не более одного такого примера.

б) Всего 1 балл, ставится, если дан верный ответ.

в) Всего 2 балла:

- ставятся 2 балла, если
  - Разобраны или учтены все случаи распределения благ для второго человека, найдены правильные ограничения для каждого случая, когда дележа нет ($V > 10$, $V > 50$, $V < 60$, $V < 100$), из которых корректно собран итоговый ответ. Баллы не снижаются, если при правильных неравенствах в ответе вместо V из $(50; 60)$ было написано $(-\infty, 50] \cup [60; +\infty)$.
  - Приведено альтернативное полное решение.
- ставится 1 балл, если
  - Перебраны все случаи распределения благ для второго человека, все наборы благ, которые забирает второй правильные, допущена арифметическая ошибка при подсчёте одной из краевых точек (10, 50, 60, 100);
  - Перебраны все случаи и найдены краевые точки, неверно объединены полуинтервалы;
  - Дан правильный ответ, доказательство отсутствует или не полное.

г) Всего 6 баллов:

- 6 баллов ставятся за любое полностью верное решение;
- 2 балла ставятся за явно сформулированную идею ”Один делит, другой выбирает”;
- 1 балл ставится за не доведенное до конца решение с рассуждением по индукции

с выкидыванием блага минимальной ценности.

Задача *Когда брать ипотеку? (9-10 класс)* *(12 баллов)*

Иван Дальновидный имеет следующую личную финансовую цель. Через 40 лет (480 месяцев) от текущего момента, когда он выйдет на пенсию:

- у него должна быть своя квартира;
- ипотечный кредит за нее должен быть полностью погашен;
- величина чистых активов (стоимость квартиры плюс накопления на депозите) должна быть максимально возможной при этих условиях.

Иван живет в стране с очень стабильной экономикой: инфляция в ней всегда равна $100r$ % в месяц (на эту величину ежемесячно растут все цены в экономике, в том числе цены квартир в продаже и стоимость аренды жилья), доходность всех депозитов также составляет $100r$ % в месяц (начисляется на остаток ежемесячно), на столько же процентов будет расти и ежемесячный доход Ивана за вычетом необходимых расходов на все товары и услуги, кроме жилья. В начальный момент времени состояние Ивана описывается следующими значениями переменных:

- он живет в съемной квартире, арендная плата за которую равна $R_0 > 0$ (арендная плата выплачивается в конце каждого месяца);
- доход за месяц за вычетом необходимых расходов, кроме жилья, равен $Y_0 > R_0$;
- накопления на депозите отсутствуют: $S_0 = 0$;
- цена такой квартиры, какую хочет купить Иван, равна $P_0 > 0$.

Своей квартиры у Ивана нет, и без ипотеки (на собственные сбережения) он купить ее не сможет ни в один из моментов. Он может в любой момент прекратить арендовать квартиру и купить свою в ипотеку по ставке $100r_c$ % в месяц ($r_c > r$, капитализация ежемесячно). Назовем этот момент $t^\star$. Срок ипотеки составляет $N < 480$ месяцев. Чтобы взять ипотеку, он снимает все свои сбережения с депозита и использует их для уплаты первоначального взноса, а на оставшуюся часть стоимости квартиры берет кредит. Начиная с момента $t^\star + 1$, он перестает платить за аренду и вместо нее выплачивает в моменты $t^\star + 1$, $t^\star + 2$, ..., $t^\star + N$ не растущий с инфляцией ипотечный платеж M, рассчитываемый по правилу аннуитета.

Независимо от того, платит Иван в конкретный месяц за аренду или за ипотеку, все оставшиеся средства он сразу после этой выплаты кладет на банковский депозит (кроме момента $t^\star$, в который оставшиеся после уплаты аренды средства идут в счет первоначального взноса по ипотеке).

а) *(3 балла)* Найдите сумму сбережений Ивана $S^\star$ в момент времени $t^\star$ (непосредственно перед покупкой квартиры) и размер кредита $L^\star$.

б) *(1 балл)* Выразите M через $L^\star$, r_c и N.

в) *(8 баллов)* В какой момент $t^\star$ Ивану нужно взять ипотеку, чтобы достичь личной финансовой цели? Ответ обоснуйте и выразите через соотношение параметров Y_0, R_0, r_c, r и N. *Подсказка: вам может помочь дисконтирование.*

Решение

а) *(3 балла)* В каждый момент t ($0 \leqslant t \leqslant t^\star$) Иван откладывает на депозит сумму $Y_t - R_t = (Y_0 - R_0)(1 + r)^t$. Эти средства лежат на депозите оставшиеся $(t^\star - t)$ месяцев вплоть до момента $t^\star$. К моменту $t^\star$ этот взнос с учетом процентов превратится в:

$$((Y_0 - R_0)(1+r)^t) \cdot (1+r)^{t^\star - t} = (Y_0 - R_0)(1+r)^{t^\star}$$

Будущая стоимость каждого взноса к моменту $t^\star$ одинакова и равна $(Y_0 - R_0)(1+r)^{t^\star}$. Поскольку таких взносов ровно $t^\star + 1$ (если считать с момента 0), общая сумма сбережений составит:

$$S_{t^\star} = (t^\star + 1)(Y_0 - R_0)(1+r)^{t^\star}$$

.

Размер кредита равен стоимости квартиры в момент $t^\star$ минус сбережения:

$$L_{t^\star} = P_{t^\star} - S_{t^\star} = P_0(1+r)^{t^\star} - (t^\star + 1)(Y_0 - R_0)(1+r)^{t^\star} = (P_0 - (t^\star + 1)(Y_0 - R_0))(1+r)^{t^\star}$$

б) *(1 балл)* Ежемесячный аннуитетный платеж M выплачивается N раз. Приведенная стоимость аннуитета (при ставке r_c) равна сумме кредита:

$$L_{t^\star} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M}{(1+r_c)^k} = M\frac{1-(1+r_c)^{-N}}{r_c}$$

Отсюда сам платеж равен:

$$M = L_{t^\star}\frac{r_c}{1-(1+r_c)^{-N}}$$

.

в) *(8 баллов)* Конечная стоимость квартиры $P_{480} = P_0(1+r)^{480}$ от выбора t^* не зависит. Поэтому нужно максимизировать сумму на депозите Ивана на момент $t = 480$.

Максимизация суммы на депозите в момент $t = 480$ эквивалентна максимизации приведенной к моменту 0 стоимости всех его доходов и расходов к моменту $t = 480$. Дисконтировать потоки нужно по ставке r, так как именно она является ставкой по депозиту.

Поток доходов Ивана Y_t от выбора t^* не зависит. Поэтому максимизация богатства эквивалентна минимизации приведенной стоимости издержек на решение жилищного вопроса (аренды и ипотеки), которые состоят из трех частей: арендные платежи, первый взнос, и платежи по ипотеке.

1. Приведенная стоимость арендных платежей за $t^\star$ месяцев составит:

$$PV_R(t^*) = \sum_{t=0}^{t^\star} \frac{R_0(1+r)^t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{t^\star} R_0 = R_0 \cdot (t^\star + 1).$$

2. Приведенная к моменту 0 стоимость потраченных на первый взнос сбережений в момент t^* равна

$$PV_S(t^*) = S_{t^*}(1+r)^{-t^*} = (t^\star + 1)(Y_0 - R_0)(1+r)^{t^\star}(1+r)^{-t^*} = (t^* + 1)(Y_0 - R_0).$$

3. Приведенная стоимость аннуитетных платежей по кредиту составит:

$$PV_M(t^*) = \sum_{k=1}^{N} \frac{M}{(1+r)^{k+t^*}} = \frac{1-(1+r)^{-N}}{r} \frac{M}{(1+r)^{t^*}}.$$

Подставив M, а затем $L_{t^\star}$, получаем:

$$PV_M(t^*) = \frac{1-(1+r)^{-N}}{r} \frac{L_{t^*}}{(1+r)^{t^*}} \frac{r_c}{1-(1+r_c)^{-N}} \qquad (12.1)$$

$$= \frac{1-(1+r)^{-N}}{r} (P_0 - (t^\star+1)(Y_0 - R_0)) \frac{r_c}{1-(1+r_c)^{-N}}. \qquad (12.2)$$

Введем обозначение $K := \frac{r_c(1-(1+r)^{-N})}{r(1-(1+r_c)^{-N})}$. Тогда общая функция приведенных издержек от $t^\star$ имеет вид:

$$C(t^\star) = PV_R(t^*) + PV_S(t^*) + PV_M(t^*) \qquad (12.3)$$

$$= R_0 t^\star + (t^* + 1)(Y_0 - R_0) + K(P_0 - (t^\star + 1)(Y_0 - R_0)) \qquad (12.4)$$

$$= const + t^\star[Y_0 - K(Y_0 - R_0)]. \qquad (12.5)$$

Функция $C(t^\star)$ линейна. Оптимум зависит от знака коэффициента при $t^\star$:

- Если $Y_0 > K(Y_0 - R_0)$, коэффициент положителен. Издержки растут с увеличением $t^\star$. Чтобы их минимизировать, Ивану нужно выбрать минимально возможный срок, то есть $t^\star = 0$ (взять ипотеку сразу).
- Если $Y_0 < K(Y_0 - R_0)$, коэффициент отрицателен. Издержки убывают с ростом $t^\star$. Оптимально откладывать покупку как можно дольше, то есть $t^\star = 480 - N$.
- Если $R_0 = K(Y_0 - R_0)$, издержки не зависят от t^*. Ивану безразлично, когда брать ипотеку, любой момент $t^\star \in [0; 480 - N]$ будет оптимальным.

Примечание 1: Если бы по условиям ипотеки требовался минимальный первоначальный взнос, то условие на параметры, определяющие то, когда нужно брать ипотеку (в начале или в конце), не поменялось бы, то вместо $t^\star = 0$ нужно было бы брать ипотеку сразу, как только сумма сбережений достигает минимального первоначального взноса.

Примечание 2: Вывод достаточно интуитивен: получаем, что ипотеку нужно откладывать на будущее, если доля арендой платы в доходе R_0/Y_0 достаточно низка или если ставка r_c достаточно высока.

Примечание 3: в интернете можно найти много разных советов о том, когда стоить брать ипотеку. Некоторые советчики предлагают брать ее, например, в момент, когда арендная плата сравнивается с аннуитетным платежом. Данная задача показывает, что это необязательно оптимально.

Схема проверки

Участник мог исходить как из того, что число периодов роста совпадает с числом моментов зачисления средств, так из того, что они отличаются на единицу. Засчитывались решения при обеих трактовках при условии, что участник придерживался единой трактовки на протяжении всей работы.

а) Всего за пункт 3 балла, из них:

K1 Верно определена сумма ежемесячного отчисления на депозит → 1 балл

K2 Получено верное выражение для накоплений $S_{t^\star} = (t^\star + 1)(Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^\star}$ → 1 балл

K3 Верно выражен размер кредита $L_{t^\star}$ через стоимость квартиры и накопления → 1 балл

б) Всего за пункт 1 балл:

K4 Записана верная формула аннуитетного платежа M через $L^\star$, r_c и N → 1 балл

в) Всего за пункт 8 баллов, из них:

K5 Указано, что стоимость квартиры $P_0(1 + r)^{480}$ не влияет на выбор оптимального t^*, или стоимость квартиры учтена в целевой функции →1 балл

K6 Описана оптимизационная задача →1 балл

K7 Выписана верная формула для целевой функции, приведенной к любому фиксированному моменту времени →1 балл

K8 Формула для целевой функции правильно преобразована к виду $const - t^*(Y_0 - K(Y_0 - R_0))$.

K9 Приведено рассуждение о том, что целевая функция линейна ⇒ оптимум достигается на одном из краев (за исключением пограничного случая) →1 балл

K10 Рассмотрен случай $Y_0 > K(Y_0 - R_0)$, сделан вывод о том, что в нем $t^* = 0$ →1 балл

K11 Рассмотрен случай $Y_0 = K(Y_0 - R_0)$, сделан вывод о том, что в нем t^* любое от 0 до $480 - N$ →1 балл

K12 Рассмотрен случай $Y_0 < K(Y_0 - R_0)$, сделан вывод о том, что в нем $t^* = 480 - N$ →1 балл